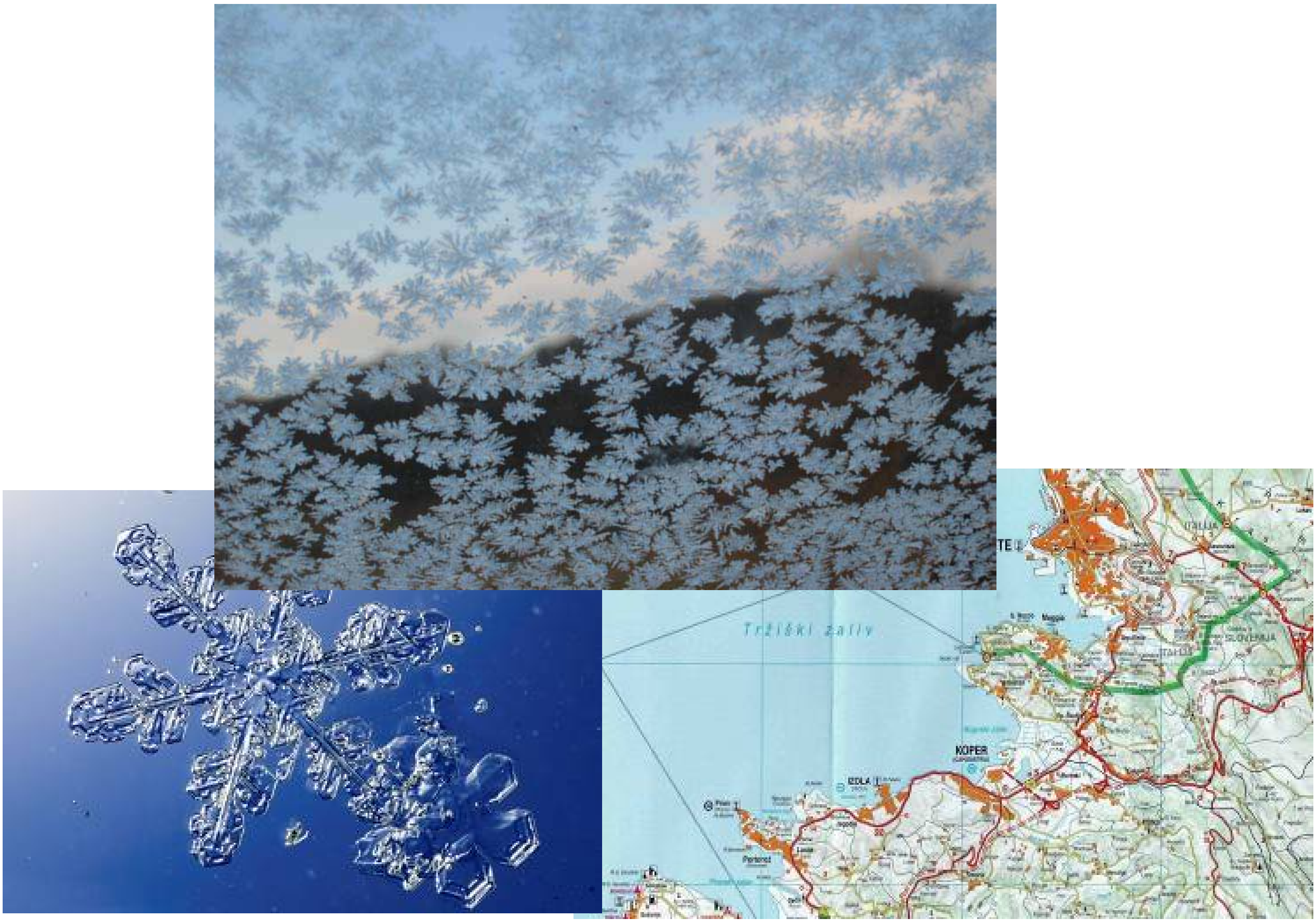
SNEŽINKA POVEČALA SLOVENSKO OBA

SNEŽINKA POVEČALA SLOVENSKO OBALO

FRAKTALI V NARAVI

Šol.leto 2007/08



Avtorja:
Vendi Grobelšek
Dino Mehle

Mentorica:
Bojana Pevec

Šmarje pri Jelšah, maj 2008

»Oblaki niso krogle, gore niso stožci in strela ne potuje po premici,« pravi Benoit Mandelbrot, *utemeljitelj fraktalne* ***geometrije, s katero lahko presenetljivo dobro*** **in** ***učinkovito opišemo mnoge naravne geometrijske oblike in vzorce.***

JANEZ GRADIŠEK

KAZALO

1. ZGODOVINA:

Začetki fraktalne geometrije segajo v 70. leta tega stoletja, ko je B. Mandelbrot začel objavljati prve rezultate svojega dela s področja fraktalov. Posamezne ideje v zvezi s fraktali so bile v matematiki znane že od preloma stoletja dalje, vendar je njihove skupne značilnosti uvidel šele Mandelbrot. Sirši javnosti je osnove fraktalne geometrije predstavil v knjigi z naslovom *The Fractal Geometry of Nature* (Fraktalna geometrija narave), ki je izšla leta 1982. V njej je zbral mnogo primerov pojavljanja fraktalov v naravi: od rojenja zvezd v vesolju, avtomobilov na cesti, poti strele po nebu in dviganja cigaretnega dima do prepletanja žil v človeškem srcu ter geometrijskih oblik iz rastlinskega in živalskega sveta. Izid knjige je sprožil poplavo novih raziskav naravnih pojavov, ki so pokazale, da se fraktali v naravi ne pojavljajo izjemoma, temveč zelo pogosto. Vendar evklidska geometrija, katere elementi so črta, krog, ravnina itd., ni primerna za opis fraktalov. Z evklidsko geometrijo lahko naravo dovolj dobro opišemo samo na merskih lestvicah od desetinke milimetra do nekaj metrov, kjer je človek ustvaril »ravne« črte in »gladke« ploskve. Na merskih skalah zunaj tega intervala pa prevladuje prvotna geometrija narave, ki je mnogokrat fraktalna. Za njen opis je zato primernejša fraktalna geometrija.

2. KAJ SO FRAKTALI?

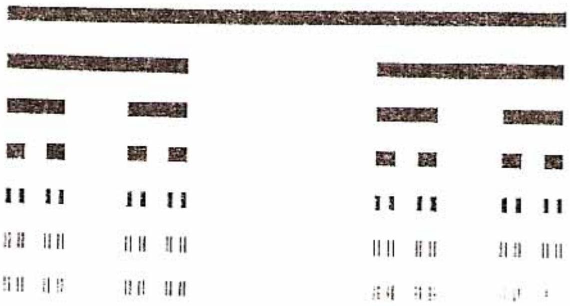
Fraktali so geometrijski objekti, katerih temeljna značilnost je samopodobnost oziroma invariantnost glede na mersko lestvico. To pomeni, da z ustrezno povečavo dela fraktala dobimo fraktal, ki je ali povsem enak prvotnemu fraktalu ali pa ga sestavljajo enaki geometrijski elementi kot prvotni fraktal. Fraktale opišemo z zaporedji matematičnih operacij, s t. i. algoritmi. Ker je za slikovni prikaz fraktalov treba matematične operacije izvesti velikokrat, so hitrejši razvoj fraktalne geometrije omogočili šele digitalni računalniki.

Glede na zapletenost matematičnih operacij v algoritmih delimo fraktale na linearne in nelinearne. Pri linearnih fraktalih so dovoljene le takšne operacije, ki ravnih črt ne skrivijo (to so: premikanje, večanje, manjšanje, zrcaljenje, vrtenje itn.), pri nelinearnih fraktalih pa takšne omejitve ni, zato je množica nelinearnih fraktalov neprimerno bogatejša od množice linearnih fraktalov. V nadaljevanju si oglejmo nekaj primerov linearnih fraktalov.

3. LINEARNI FRAKTALI

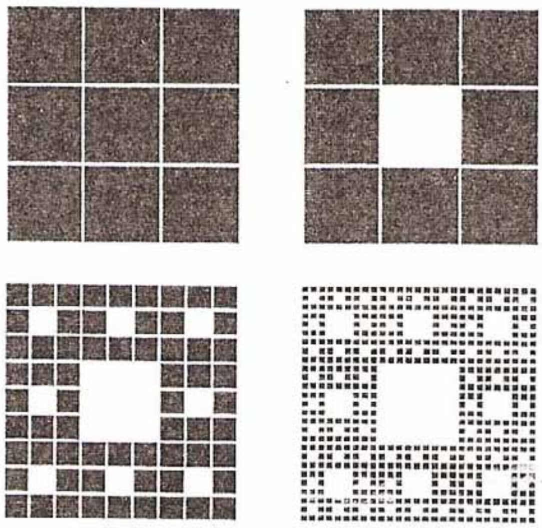
Cantorjev prah je eden najstarejših znanih fraktalov. Že leta 1883 je postopek za njegovo tvorbo objavil nemški matematik Georg Cantor. Začnemo z daljico, ki ji v prvem koraku odvzamemo srednjo tretjino (slika 1), v drugem koraku odvzamemo srednjo tretjino preostalima deloma - in tako naprej. (Na sliki 1 je za ilustracijo postopka prikazanih le prvih šest korakov.) Cantorjev prah so točke, ki ostanejo po neskončno korakih. Takih točk je neskončno mnogo, vendar so vse med seboj ločene, tako da ne tvorijo nobene črte. Prav zato jim pravimo prah.

Seveda ni nujno, da odvzemamo tretjine. Če odvzemamo drugačen del preostalih daljic (npr. četrtine), je končni rezultat še vedno neskončna množica posameznih točk, ki so le drugače razporejene kot v primeru na sliki 1.



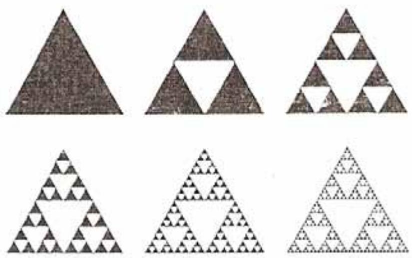
Slika 1. Prvih šest korakov tvorbe Cantorjevega prahu

Cantorjev prah je kljub svoji preprostosti zelo pomemben fraktal in je osnova mnogih drugih fraktalov, med drugim tudi naslednjih treh.



Slika 2. Prvi trije koraki tvorbe kvadrata Sierpinskega

Poljski matematik Waclaw Sierpinski je leta 1916 objavil fraktala na slikah 2 in 3. Algoritma za njuno tvorbo sta podobna kot pri Cantorjevem prahu. Kvadrat razdelimo na devet enakih kvadratov, od katerih odvzamemo sredinskega (slika 2, zgoraj). Postopek ponovimo z vsakim od preostalih osmih kvadratov: vsakokrat odvzamemo devetino preostale ploščine. Po neskončno korakih dobimo lik, katerega ploščina je nič, obseg vseh lukenj skupaj pa je neskončen. Podobno velja za trikotnik na sliki 3, ki mu pri vsakem koraku odvzamemo četrtino preostale ploščine.



Slika 3. Prvih pet korakov tvorbe trikotnika Sierpinskega

Če opisani postopek namesto na kvadratu izvajamo na kocki, dobimo gobo, ki se imenuje po avstrijskem matematiku Karlu Mengerju. Kocko razdelimo na 27 enakih kock, od katerih odvzamemo sredinskih 7. V naslednjem koraku ponovimo razdelitev in odvzemanje za vsako izmed preostalih 20 kock Po štirih korakih dobimo fraktal, medtem ko po neskončno korakih dobimo telo, katerega površina je neskončna in volumen enak nič.

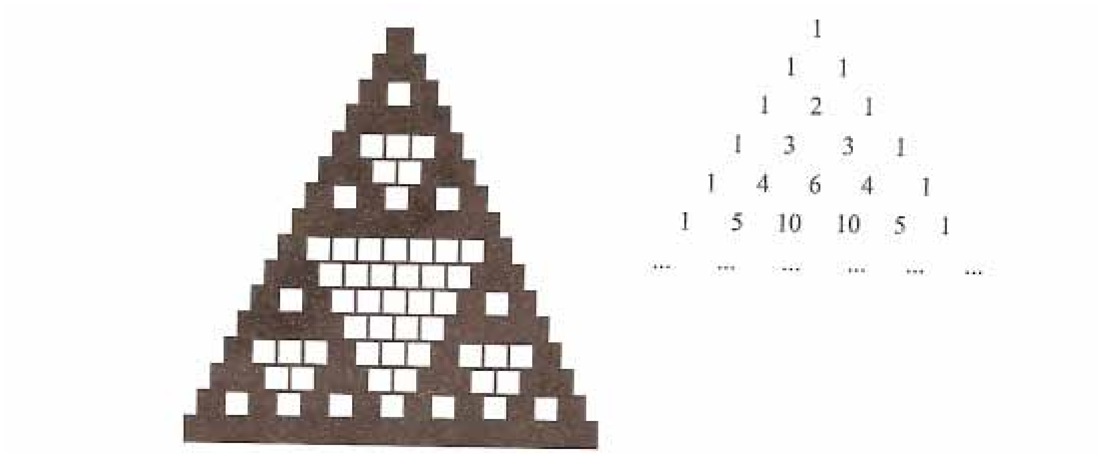
Pascalov trikotnik dobimo tako, da v obliki trikotnika razvrstimo koeficiente, ki jih dobimo iz binomske formule za $(x + y)^n$,pri čemer eksponent narašča od 0 do $n, n \in$ IN.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11	....

Slika 6. Pascalov trikotnik

4. SREČATA SE SIERPINSKI IN PASCAL

Pascalov trikotnik je v okviru srednješolske matematike zelo privlačna, žal pa tudi precej neizkoriščena tema. Samo raziskovanju njegovih lastnosti in povezav med števili v njem lahko namenimo posebno uro, tukaj pa bova nakazala nekaj stičnih točk, ki jih ima ta matematični objekt s fraktali:



Pascalov trikotnik običajno omenjamo v povezavi s koeficienti v razvoju potenc binoma, ki jih lahko zapišemo v trikotniški obliki. Možni pa so še drugi pogledi nanj: če števila obravnavamo le po sodosti in lihosti, opazimo povezavo s trikotnikom Sierpinskega. Barvanje kvadratov poteka po naslednjem pravilu: poenostavimo zapis tako, da z O označimo soda, z 1 pa liha števila. Sodim priredimo kvadrat bele barve, lihim pa kvadrat črne barve. Porajanje novega števila v vsaki naslednji vrsti poteka tako, da seštejemo obe števili v vrsti nad njim, pri tem pa upoštevamo naslednje:

O + O = O
mod 2 O + 1 =
1 mod 2 1 + O
= 1 mod 2 1 +
1 = O mod 2

Barvanje pa lahko izvršimo tudi brez tega pravila, le z opazovanjem barv kvadratov v prejšnji vrstici: če sta dva kvadrata nad kvadratom, ki ga želimo pobarvati, iste barve - izbrani kvadrat pobarvamo belo. Če sta kvadrata različne barve, ga pobarvamo črno.
Pri barvanju velikega števila vrstic se izkaže tudi to pravilo za precej nepraktično. Zatečeva se k obravnavi vsakega kvadrata kot para urejenih koordinat:

Fraktal je geometrična konstrukcija, za katero velja samopodobnost pri različnih stopnjah podrobnosti. Vizualno so zelo zapleteni. Poznamo dve vrsti fraktalov: linearni in nelinearni. So objekti ali količine, ki izražajo samopodobnost na vseh razdaljah, vendar v nekoliko bolj tehničnem smislu. Objekt namreč ni nujno natančno samopopodoben na vseh razdaljah, vendar pa mora obstajati podobnost nekega "tipa" na vseh razdaljah. Slika te količine na logaritemskem grafu mora potem dati ravno črto, katere naklon bo podajal fraktalno dimenzijo. Podobne lastnosti opazimo pri različnih objektih v naravi. Samopodobnost lahko zasledimo pri turbulenci vremena, pri gibanju tržišča, pri bitju srca. Znana je tudi samopodobnost listov na drevesih, gora ali obale. Zato lahko naravne pojave pogosto modeliramo s pomočjo fraktalov. Fraktalni motiv je sestavljen s ponavljanjem istega motiva v vse manjšem razmerju. Take same sebi podobne strukture najdemo marsikje v naravi. Tipičen primer fraktala je dolžina obale, ki jo merimo z ravnili različnih velikosti. Če bomo izmerili dolžino obale z zemljevida, kjer sploh ne vidimo malih zalivčkov, bomo izmerili drugačno dolžino, kot pa s pomočjo geodetskih pripomočkov. Če smo še natančnejši in upoštevamo še vse manjše zavojčke, skale in večje kamne, ki ležijo na obali, izmerimo še večjo dolžino obale. Tako bi lahko nadaljevali do zrnc peska, pa tudi do atomov. S tem, ko se naše merilo zmanjšuje, se dolžina obale povečuje, kar je tako imenovani paradoks dolžine obale.

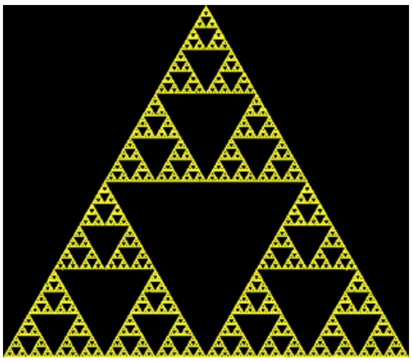
Za večino fraktalov velja, da lahko opazujemo njihove podrobnosti neskončno globoko. Fraktale lahko določimo s procesom ali s slikami, ki prikazujejo njihovo samopodobnost. Ta je v resnici le približna , saj manjše ponovitve niso zgolj natančne pomanjšave prvotne oblike. Pravo samopodobnost ima Kochova snežinka. Druga tipična lastnost je neskončna kompleksnost podrobnosti.

Torej značilnosti fraktalov so:

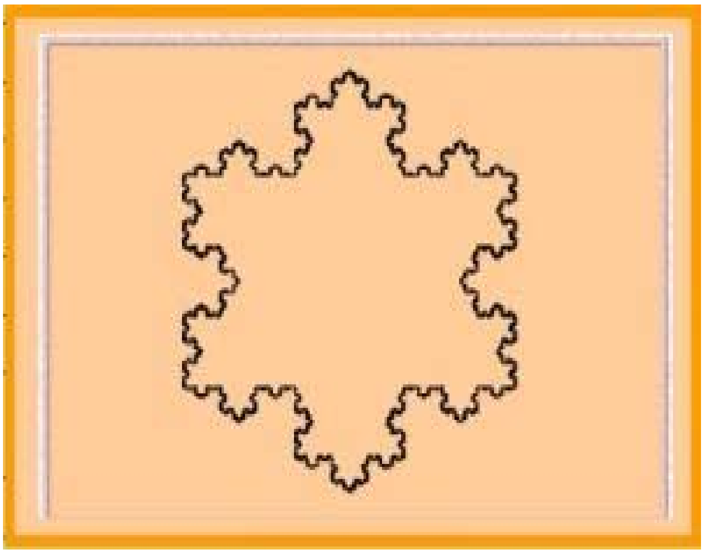
- vsebujejo podrobnosti pri poljubno veliki ali majhni povečavi
- so preveč nepravilne oblike za opis z običajnimi geometrijskimi prijemi,
- so natančno ali statistično samopodobni,
- njihova razsežnost je večja od njihove topološke razsežnosti ali pa
- so določeni rekurzivno.

Rekurzívno (latinsko *recurrere*, kar pomeni *teči nazaj*) pomeni nanašajoč na samega sebe. V matematiki označuje zaporedje, katerega *n*-ti člen je določen z enim ali več predhodnimi členi. Rekurzija se uporablja tudi v programiranju.

5. PRIMERI FRAKTALOV:

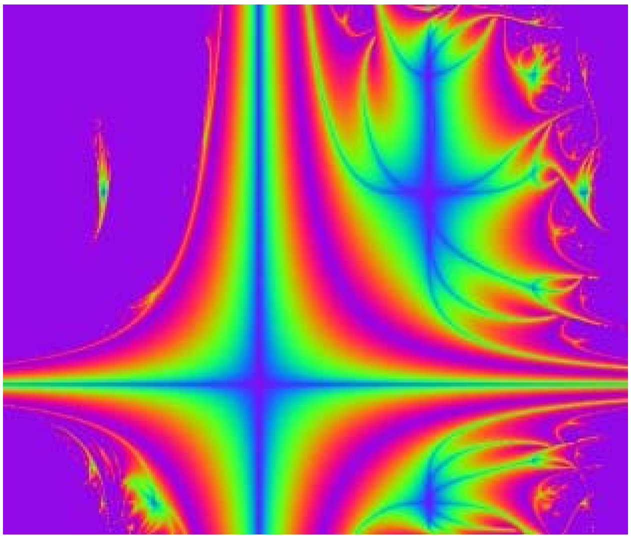


Sierpinski trikotnik - eden izmed najbolj poznanih linearnih fraktalov

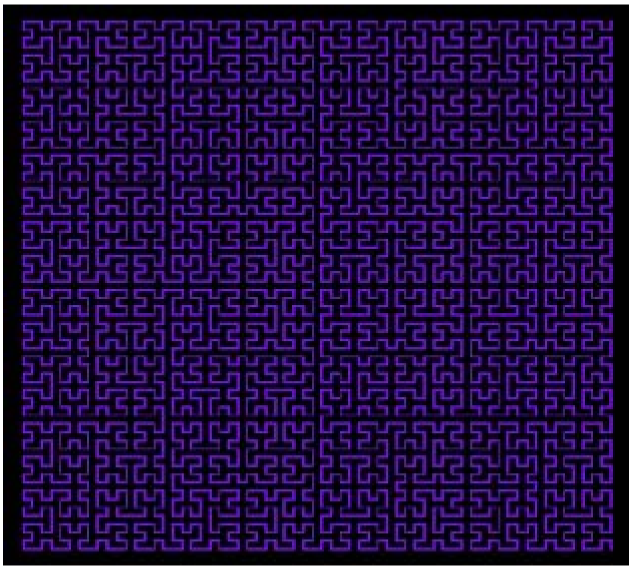


Kochova snežinka

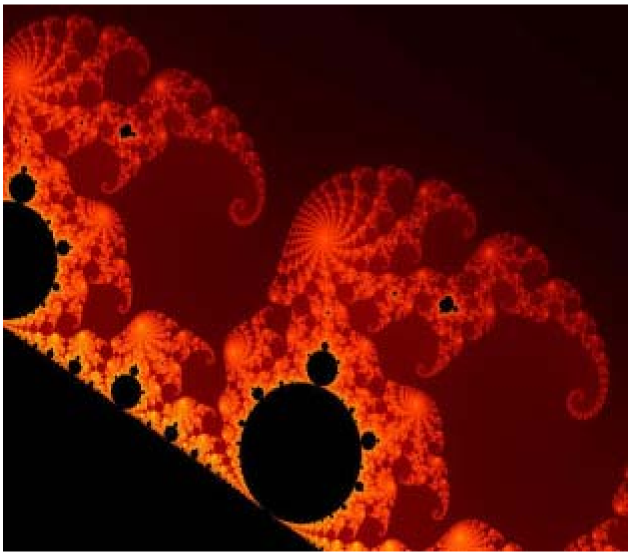
Fraktalna praprot



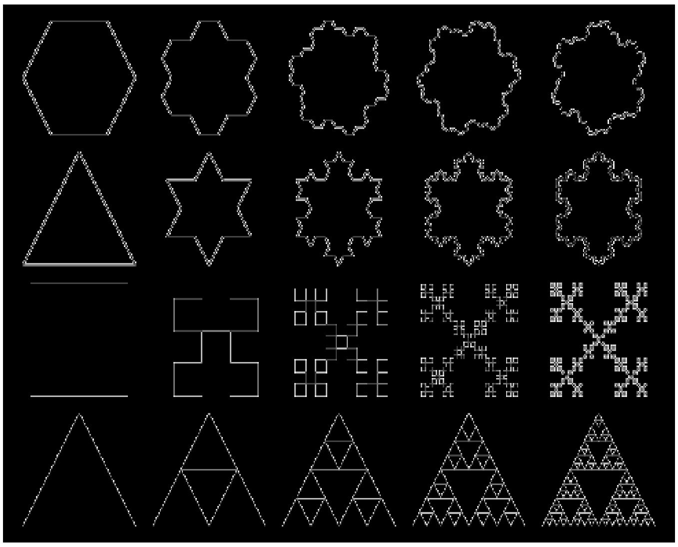
Fraktal Ljapunova



Hilberetova krivulja



Mandelbrotova množica - ena izmed najbolj poznanih nelinearnih fraktalov.



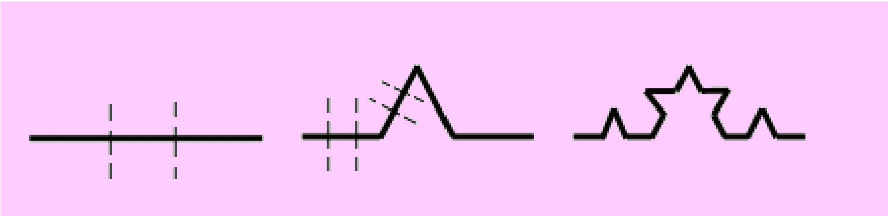
Nastanek nekaterih dobro znanih fraktalov

6. KOCHOVA SNEŽINKA

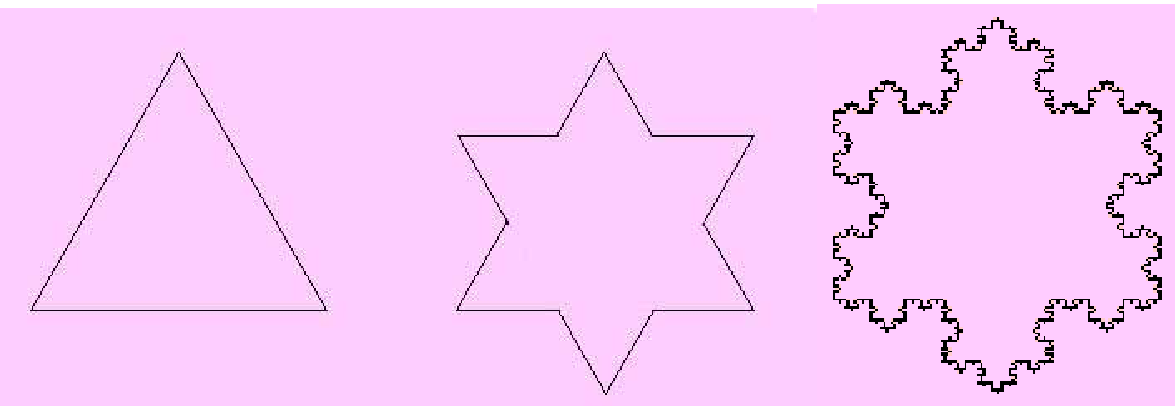
Kochova snežinka je eden prvih odkritih fraktalov. Opisal jo je Niels Fabian Helge von Koch leta 1904.

Ima pravo samo podobnost. Vsaka stranica vsebuje pomanjšane različice same sebe. Vendar se celoten fraktal nikoli ne ponovi v celoti. Ponavljajo se le delčki fraktala.

NASTANEK: Vzemimo ravno črto dane dolžine in jo razdelimo na tri dele. Srednji del zamenjamo z dvema enakima dolžinama, ki oklepata kot 60°. Isti postopek ponovimo na vsaki črti in potem spet. Temu postopku ponavljanja rečemo iteracija. Tako dobimo Kochovo **krivuljo**.



Zdaj pa vzemimo enakostranični trikotnik. Na vsaki stranici naredimo enako kot prej. Na sredini vsake stranice dobimo trikotnik, ki je za tretjino manjši. Tako smo dobili zvezdo. Sedaj ponovimo postopek na 6-ih malih trikotnikih. Z iteracijami v neskončnost dobimo Kochovo **snežinko**.



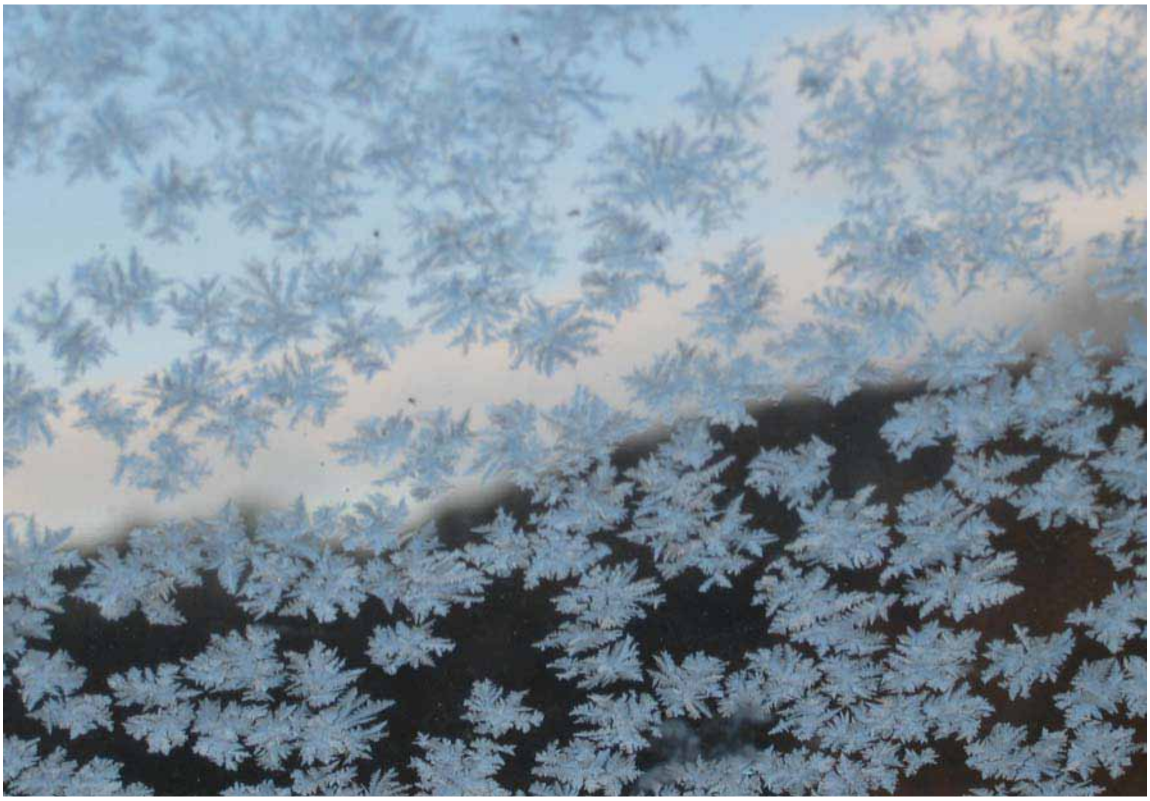
$$o = 3a + a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty, \quad p = 2\,\frac{a^2\sqrt{3}}{5}$$

S celotnim postopkom dobimo krivuljo, ki ni dvorazsežna, pa tudi enorazsežna ne, temveč je njena dimenzija enaka **1,2618**! Le kako smo prišli do tako nenavadne številke? Seveda je odvisna od tega, kako definiramo dimenzijo. Smiselno definicijo nam poda naslednji razmislek. Vzemimo daljico dolžine a. Razdelimo jo na dve enako dolgi daljici, $N = 2$. Vsaka od manjših daljic ima sedaj dolžino ½ a, torej r = ½; kjer je r faktor pomanjšane daljice. Daljico lahko razdelimo na poljubno mnogo enakih delov. Vsakič bo veljalo $\boldsymbol{N \cdot r = 1}$. Podobno bo veljalo za kocko dimenzije d, ki jo razdelimo na N enakih majhnih kockic,
$\boldsymbol{N \cdot r^d = 1}$. Z logaritmiranjem nato izračunamo dimenzijo d; $\boldsymbol{d = \ln N / \ln(1/r)}$. Sedaj pa vzemimo Kochovo krivuljo in skušajmo zapisati podobno definicijo za njeno dimenzijo. Opazujmo risanje Kochove krivulje. V vsakem koraku daljico razdelimo (kot vidimo tudi na sliki – označeno z zeleno črto) na 4 enake dele: $N=4^n$, kjer je n število koraka, v katerem smo. Vsak del je 1/3 daljice iz prejšnjega koraka, torej je $r = (1/3)^n$. Iz tega lahko izračunamo dimenzijo Kochove krivulje kar po prejšnji definiciji $\boldsymbol{d = (\ln 4) / (\ln 3)}$, pri čemer je korak n pripravno odpadel iz računa (kot seveda mora, če naj ima definicija kakršenkoli smisel). To da številsko vrednost **1,2618**, če zaokrožimo rezultat na prva štiri decimalna mesta.

Vidimo lahko, da snežinko lahko pobarvamo, ne moremo pa najti dovolj dolge vrvice, da bi jo napeli po njenem robu. Torej je obseg Kochove snežinke neskončen.

7. MATEMATIKA V NARAVI - SNEŽINKA

Kdo bi si mislil, da je mati narava ena od najboljših matematikov…..
Vsi vemo, da dela čudeže in celo sneg, ena najljubših iger, ko smo otroci, in ena najlepših spektaklov, ko smo odrasli, je za naravo samo geometrija.



Snežinke na steklu

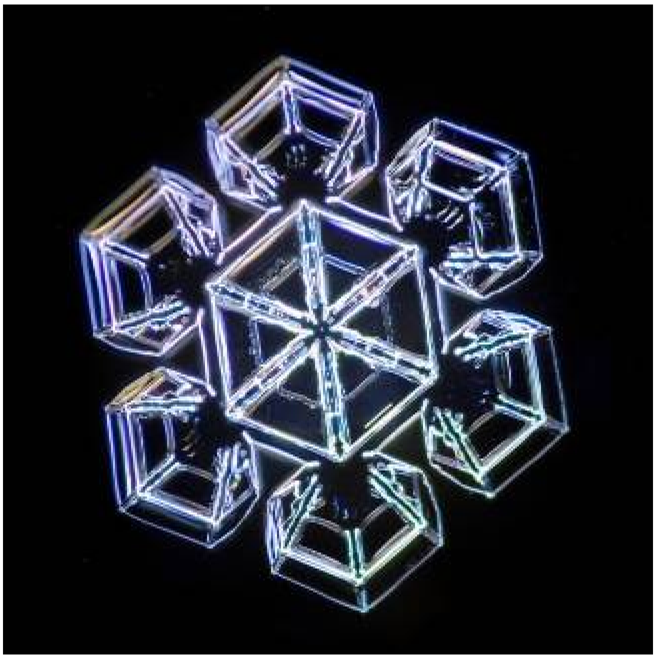
8. RAZISKOVANJE IN UGOTOVITVE PRI SNEŽINKI

Svoje raziskovanje smo usmerili v opazovanje velikosti in oblike snežink pri večkratnem sneženju.

Ugotovitve so bile zelo zanimive, saj so snežinke ne samo različnih velikosti, temveč tudi zelo različnih oblik. Ta različnost se kaže že pri enkratnem sneženju, še bolj pa je opazna pri večkratnem.

Posebne oblike snežink, kjer je vidna fraktalnost, nam je uspelo ujeti na ohlajeno steklo. (zgornja fotografija)

Generirani obliki snežink



9. PRAPROTI

ZGRADBA : suhe in rjave listne luske

rahis (glavna os pernatega lista)

mahalo - list praproti (tu se začne povezava med fraktali in realnimi objekti)

listno rebro - listič, ki izhaja iz mahala

listni rogelj - listič, ki izhaja iz listnega rebra

Slovensko ime: **navadna glistovnica**

Latinsko ime: Dryopteris filix - mas

Opis rastline: Listna ploskev je suličasta, spodaj je močno zožana, krpice zadnjega reda imajo priostrene zobce. Uspeva na senčnih in vlažnih rastiščih.

Lubje: /

Listi: So lijakasto razvrščeni, dolgi 50-150 cm. Listni pecelj je kratek in porasel z luskami.

Trosovniki: Trosišča so okrogla z ledvičastim zastiralcem. Nameščena so v dveh vrstah.

Plodovi: Trosi.

Slovensko ime: **orlova praprot**

Latinsko ime: Pteridium aquilinum

Opis rastline: Listno steblo je visoko 2m in debelo 2-3 mm.

Lubje: /

Listi: Listna ploskev je sestavljena in rumeno zelena. Listi so sestavljeni in jih je več.

Trosovniki: So na spodnji strani listov.

Plodovi: /

10. FRAKTALNA PRAPROT

Veliko rastlin, vključno s praprotjo, je sestavljeno iz delov, ki spominjajo na celoto. Vsak listič zgleda kot mala praprot. In sam po sebi je spet sestavljen iz lističev, ki spet spominjajo na praprot.

TU SE MED MAHALOM, LISTNIM REBROM IN LISTNIM ROGLJEM ZELO DOBRO OPAZI »FRAKTALNOST«

Računalniško generiran list praproti

Slika prave praproti

11. RAZISKOVANJE IN UGOTOVITVE PRI PRAPROTI

Naše nadaljnje raziskovanje smo posvetili opazovanju fraktalne razporeditve delov praproti navadne glistovnice in orlove praproti, ki ju najdemo v naši okolici.

Pri obeh vrstah praproti je zelo dobro vidna fraktalnost, ki smo jo nadgradili še s primerjavo med pravo praprotjo in računalniško generirano praprotjo. Ugotovitve kažejo, da se z računalniškim oblikovanjem že zelo dobro približujemo naravni obliki fraktalne razporeditve delov praproti.

(zgornje slike)

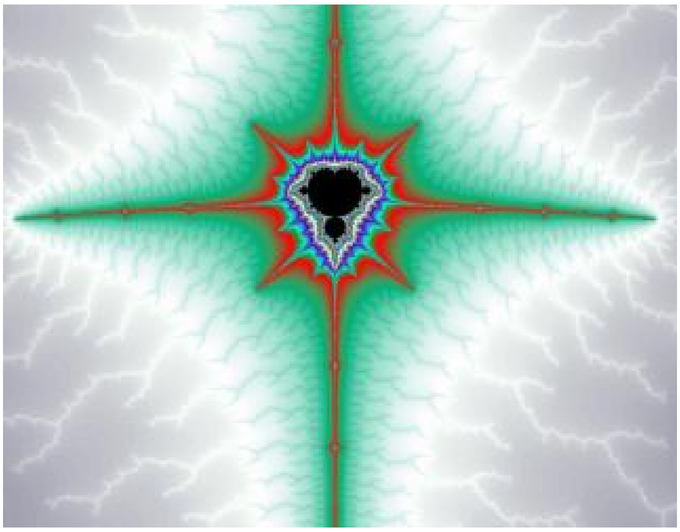
12. RAČUNALNIŠKO MODELIRANI FRAKTALI

Že Benoit B. Mandelbrot, ki ga imajo mnogi za očeta fraktalov, je intenzivno raziskoval povezavo med naravo in fraktali. Odkril je, da narava razodeva mnogo fraktalnih oblik. Tako je mogoče z raznimi fraktali računalniško modelirati različne oblike narave, npr. gorovja, pokrajine, kontinente, planete, oblake, jezera, organe v medicini, potem tudi pojave v ekonomiji, fiziki, pojave v vesolju itn. Izpopolnil je idejo fraktalne dimenzije in iz nje izpeljal pojem "fraktal". Vendar pa se fraktal še dolgo ne bi pojavil, če ne bi bilo računsko in grafično zmogljivih računalnikov.

Fraktali so vizualno zelo zapleteni. Oglejmo si samo nekatere od spodnjih slik fraktalov, pa se lahko o tem prepričamo. Njihova osnovna značilnost, kot smo že omenili, je samopodobnost in z njo povezana fraktalna dimenzija.

Mandelbort je s pomočjo računalnika prvi generiral fraktal v kompleksni ravnini leta 1975. On je tudi poimenoval te matematične oblike z imenom FRAKTALI. Začela se je doba nelinearnih fraktalov in Mandelbort je postal njen oče . Po njem je tudi poimenovan Mandelbortov fraktal**.**

S pomočjo računalniške grafike je Madelbrot lahko prikazal, da je delo Julia izhodišče za nekatere najlepše fraktale znane do danes. Da je lahko to naredil, je moral razviti ne samo nove matematične ideje, temveč tudi ene izmed prvih računalniških programov za izpis grafike. Zanimivo je, da je bil Madelbrot z Julijevim delom seznanjem že leta 1918, a ga je zavrnil, češ da so njegovi matematični pogledi povsem drugačni od njegovih. Zaradi tega je njegova teorija padla v pozabo, vse do sedemdesetih let, ko je Benoit ponovno naletel na Julijeve raziskave.



13. FRAKTALNA OBLIKA SLOVENSKE OBALE

Vsa ta razmišljanja pa so nas vodila k ideji raziskovanja fraktalnih oblik slovenske obale in še več; kako bi lahko s pomočjo računalnika in našega znanja o fraktalih generirali in povečali slovensko obalo.

Dolžino obale lahko merimo z ravnili različnih velikosti. Izmerjena dolžina slovenske obale je 47 km Če merimo dolžino obale z zemljevida, kjer sploh ne vidimo malih zalivčkov, izmerimo drugačno dolžino, kot pa s pomočjo geodetskih pripomočkov.

Če smo še natančnejši in upoštevamo še vse manjše zavojčke, skale in večje kamne, ki ležijo na obali, izmerimo še večjo dolžino obale. Tako bi lahko nadaljevali do zrnc peska, pa tudi do atomov. S tem, ko se naše merilo zmanjšuje, se dolžina obale povečuje, kar je tako imenovani paradoks dolžine obale.

Počutim se kot deček, ki se igra na obali in včasih najde kakšen kamenček, ki je bolj gladek kot ostali, ali školjko, ki je lepša od običajnih, medtem ko sta morje resnice in ocean skrivnosti neodkrita in nedostopna pred mano.
Isaac Newton

14. ZAKLJUČEK

Fraktal je geometrična konstrukcija, za katero velja samopodobnost pri različnih stopnjah podrobnosti. Vizualno so zelo zapleteni. Poznamo dve vrsti fraktalov: linearni in nelinearni. Podobne lastnosti opazimo pri različnih objektih v naravi. Zato lahko naravne pojave pogosto modeliramo s pomočjo fraktalov. Fraktalni motiv je sestavljen s ponavljanjem istega motiva v vse manjšem razmerju. Take same sebi podobne strukture najdemo marsikje v naravi.

Pravo samopodobnost ima Kochova snežinka. Vidimo lahko, da snežinko lahko pobarvamo, ne moremo pa najti dovolj dolge vrvice, da bi jo napeli po njenem robu. Torej je obseg Kochove snežinke neskončen.

Svoje raziskovanje smo usmerili v opazovanje velikosti in oblike snežink pri večkratnem sneženju.

Ugotovitve so bile zelo zanimive, saj so snežinke ne samo različnih velikosti, temveč tudi zelo različnih oblik. Ta različnost se kaže že pri enkratnem sneženju, še bolj pa je opazna pri večkratnem.

Naše nadaljnje raziskovanje smo posvetili opazovanju fraktalne razporeditve delov praproti navadne glistovnice in orlove praproti, ki ju najdemo v naši okolici.

Pri obeh vrstah praproti je zelo dobro vidna fraktalnost, ki smo jo nadgradili še s primerjavo med pravo praprotjo in računalniško generirano praprotjo. Ugotovitve kažejo, da se z računalniškim oblikovanjem že zelo dobro približujemo naravni obliki fraktalne razporeditve delov praproti.

Vsa ta razmišljanja pa so nas vodila k ideji raziskovanja fraktalnih oblik slovenske obale in še več; kako bi lahko s pomočjo računalnika in našega znanja o fraktalih generirali in povečali slovensko obalo.

Dolžino obale lahko merimo z ravnili različnih velikosti. Če merimo dolžino obale z zemljevida, kjer sploh ne vidimo malih zalivčkov, izmerimo drugačno dolžino, kot pa s pomočjo geodetskih pripomočkov. Če smo še natančnejši in upoštevamo še vse manjše zavojčke, skale in večje kamne, ki ležijo na obali, izmerimo še večjo dolžino obale. Tako bi lahko nadaljevali do zrnc peska, pa tudi do atomov. S tem, ko se naše merilo zmanjšuje, se dolžina obale povečuje, kar je tako imenovani paradoks dolžine obale.

Neverjetno!

Kdo bi si mislil, da je mati narava ena od najboljših matematikov….. Povečala nam je slovensko obalo in razširila naše znanje matematike.

Hvala mentorici Bojani Pevec, ki nam je pri najinem delu svetovala in gospe Darinki Seničar za jezikovni pregled naloge.

15. LITERATURA:

Ivan Pucelj, *Presek 2, 1977/1978, Ploskovci.*

James Gleick, *KAOS, Rojstvo nove znanosti.*

Milan Ambrožič, *ŽIT, februar 1994, Teorija o kaosu.*

Kenneth Falconer (marec 1990), *Fractal Geometry*.

http://sl.wikipedia.org/wiki/fraktal.