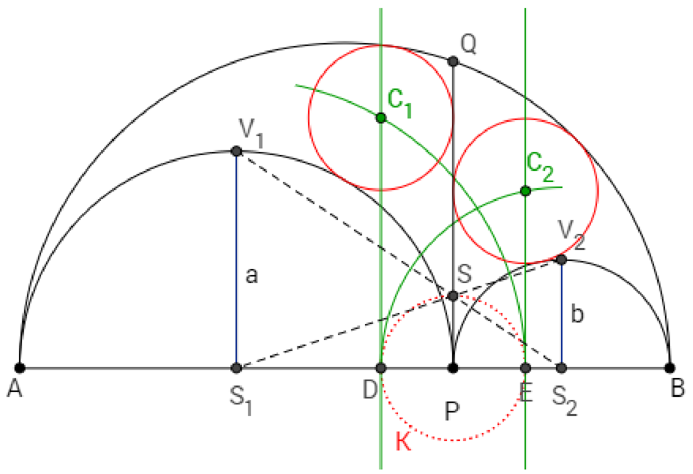
OSNOVNA ŠOLA GRIŽE

GEOMETRIJSKA KONSTRUKCIJA ARHIMEDOVIH DVOJČKOV



Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

AVTORICE:

Lava Vovk Petrovski (9. razred)

Naja Šporn (9. razred)

Neža Vodeb (9. razred)

MENTORICA:

Anamarija Cencelj

Celje, marec 2017

OSNOVNA ŠOLA GRIŽE

GEOMETRIJSKA KONSTRUKCIJA ARHIMEDOVIH DVOJČKOV

Raziskovalno področje: MATEMATIKA

Raziskovalna naloga

AVTORICE:

Lava Vovk Petrovski (9. razred)
Naja Šporn (9. razred)
Neža Vodeb (9. razred)

MENTORICA:

Anamarija Cencelj

Mestna občina Celje, Mladi za Celje

Celje, marec 2017

POVZETEK

V raziskovalni nalogi smo si zastavili cilj raziskati geometrijsko konstrukcijo in lastnosti dveh krogov v čudovitem geometrijskem liku, ki se imenuje arbelos ali čevljarski nož. Z arbelosom so se ukvarjali številni matematiki, med prvimi že starogrški matematik Arhimed.

S pomočjo številnih matematičnih izrekov, predvsem v trikotnikih, smo raziskali polmera in središči Arhimedovih dvojčkov, analizirali geometrijsko konstrukcijo polmerov in središč ter s programom Geogebra narisali Arhimedova dvojčka.

Ugotovili smo, da z osnovnošolskim znanjem matematike številnih drugih krogov v arbelosu še ne znamo analizirati in konstruirati.

Ključne besede: Arbelos, Arhimedova dvojčka, geometrijska konstrukcija, Pitagorov izrek, podobnost, Geogebra

KAZALO

KAZALO SLIK

1 UVOD

Arbelos oziroma čevljarski nož je čudovit lik, s katerim so se ukvarjali številni matematiki. Znotraj arbelosa lahko konstruiramo številne kroge: Schochova kroga, Arhimedova dvojčka, Bankoffov krog, Paposova veriga … Tudi mi smo raziskovali arbelos. Osredotočili smo se na geometrijsko konstrukcijo krogov, enega najpomembnejših matematikov - Arhimedova dvojčka.

Kaj sploh pomeni beseda *geometrijska konstrukcija*?

Je risanje geometrijskih likov z največjo možno natančnostjo. Uporabljamo točno določeno geometrijsko orodje in postopke, ki so v načelu povsem točni. Za geometrijsko konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov smo zato potrebovali ogromno matematičnih izrekov. Z izpeljavo številnih lastnosti arbelosa in Arhimedovih dvojčkov smo z dinamičnim programom Geogebra konstruirali ta čudovita kroga, katerih dvojčke matematiki iščejo še danes.

1.1 Raziskovalni problem

Namen naše raziskovalne naloge je bil s pomočjo programa Geogebra narisati geometrijsko konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov. Geometrijske konstrukcije nekaterih drugih krogov v arbelosu bi za naše trenutno znanje matematike predstavljal prevelik problem.

Znotraj tega raziskovanja smo iskali odgovore na naslednja ciljna vprašanja:

1. Katere matematične izreke potrebujemo za geometrijsko konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov?
2. Koliko meri polmer Arhimedovih dvojčkov in kje v ravnini sta njuni središči?
3. Kako s programom Geogebra narisati geometrijsko konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov?

1.2 Hipoteze

Glede na cilje raziskovalnega problema sva postavili naslednje hipoteze:

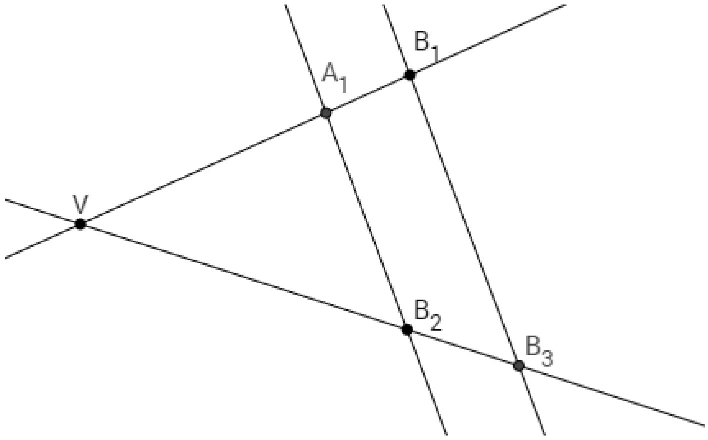
H1: Za geometrijsko konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov je dovolj osnovnošolsko znanje matematike.

H2: Z matematičnim programom Geogebra lahko narišemo geometrijsko konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov.

2 PODOBNOST TRIKOTNIKOV

2.1 Talesov izrek o sorazmerjih

Starogrški naravoslovec Tales je okoli 500 let pred našim štetjem skušal rešiti nalogo, kako izmeriti višino Keopseve piramide v Egiptu. Pri reševanju te naloge je prišel do pomembnega izreka, ki se imenuje **Talesov izrek o sorazmerjih.**

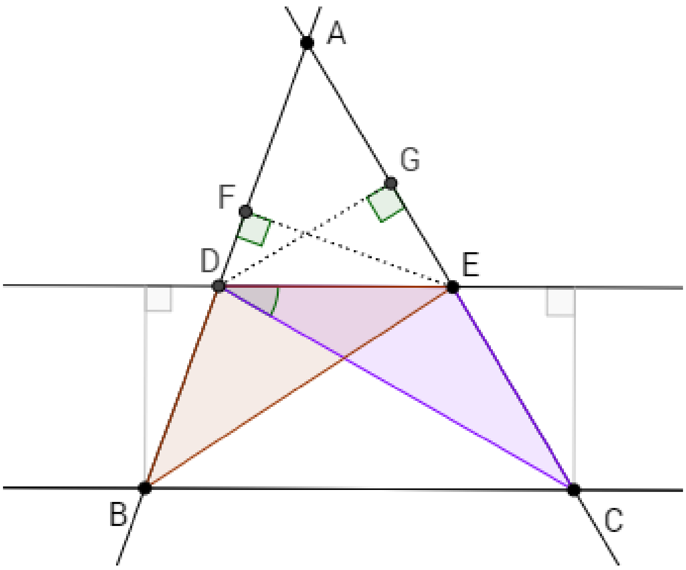


Slika 1: Talesov izrek o sorazmerjih

Če množico premic, ki se sekajo v eni točki, sekamo z množico vzporednic, je razmerje odsekov na eni premici šopa enako razmerju enakoležnih odsekov na katerikoli premici istega šopa.

$$|VA_1| : |VB_1| = |VA_2| : |VB_2| \text{ ali } |VA_1| : |VA_2| = |VB_1| : |VB_2|$$

Poglejmo si dokaz Talesovega izreka.



Slika 2: Dokaz Talesovega izreka

Pokazati moramo, da velja (slika 2)

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}$$

Vpeljimo oznake:

F … pravokotna projekcija točke E na daljico AB

G … pravokotna projekcija točke D na daljico AC

$|EF|$ … višina trikotnika ADE in DBE

$|DG|$ … višina trikotnika ADE in DEC

S_{ADE} … ploščina trikotnika ADE

S_{BDE} … ploščina trikotnika BDE

S_{DEC} … ploščina trikotnika ADE

Najprej izrazimo ploščino trikotnikov.

$$S_{ADE} = \frac{|AD| \cdot |EF|}{2} \qquad S_{ADE} = \frac{|AE| \cdot |DG|}{2}$$

$$S_{BDE} = \frac{|DB| \cdot |EF|}{2} \qquad S_{DEC} = \frac{|EC| \cdot |DG|}{2}$$

Sedaj zapišimo sorazmerji ploščin in ju poenostavimo.

$$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} = \frac{|AD|}{|DB|} \qquad \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

Iz obeh sorazmerij izrazimo S_{ADE}:

$$S_{ADE} = S_{BDE} \cdot \frac{|AD|}{|DB|} \qquad S_{ADE} = S_{DEC} \cdot \frac{|AE|}{|EC|}$$

Ploščini enačimo:

$$S_{BDE} \cdot \frac{|AD|}{|DB|} = S_{DEC} \cdot \frac{|AE|}{|EC|}$$

in upoštevamo, da sta nosilki daljic DE in AB vzporedni, zato imata trikotnika BDE in DEC enako ploščino. Ploščini S_{BDE} in S_{DEC} krajšamo in dobimo

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}.$$

Dobljeni zapis preuredimo

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DB|}{|EC|}.$$

V dobljenem sorazmerju uporabimo lemo, ki pravi:

Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, kjer je* $b \neq 0, d \neq 0$ *in* $b \neq d$*. Če velja, da je* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$*, potem velja tudi*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Z uporabo leme dobimo, da je

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|DB|}{|EC|} = \frac{|AD| + |DB|}{|AE| + |EC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Sledi, da je:

$$\frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

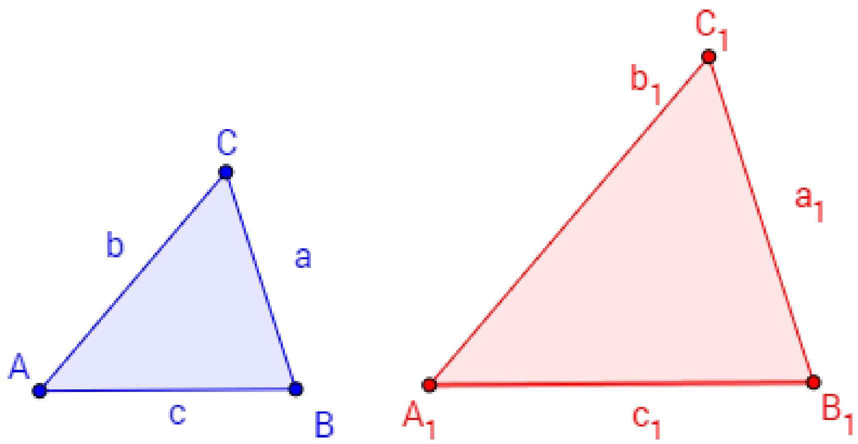
Dobljeno sorazmerje preuredimo in dobimo sorazmerje, ki smo ga predpostavili v začetku dokaza.

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}$$

2.2 IZREKI O PODOBNOSTI TRIKOTNIKOV

Trikotnika ABC in $A_1B_1C_1$ sta podobna natanko tedaj, ko se ujemata v vseh notranjih kotih.

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow (\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1)$$



Slika 3: Podobna trikotnika

Za podobnost trikotnikov je dovolj, da so izpolnjene le nekatere lastnosti in so kot posledica izpolnjene tudi druge. Z **izreki o podobnosti trikotnikov** se omejimo na najmanj potrebnih lastnosti za zadostitev pogojev podobnosti.

Dva trikotnika sta si podobna, če se ujemata:

- v dveh notranjih kotih,
- v razmerjih dveh enakoležnih stranic ($a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$),
- v razmerju dveh stranic in kotu med njima.

2.3 IZREKI V PRAVOKOTNEM TRIKOTNIKU

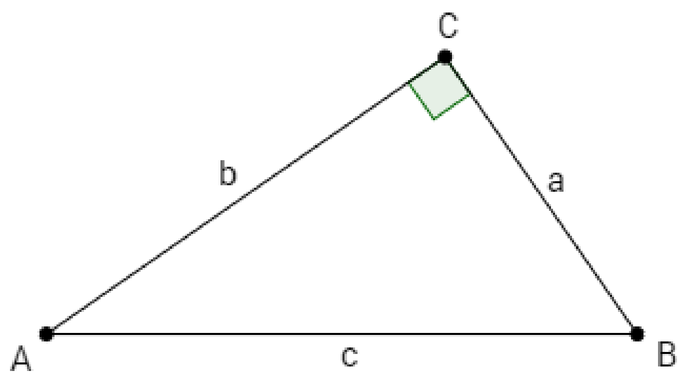
Pri raziskovanju Arhimedovih dvojčkov bomo potrebovali tudi izreke v pravokotnem trikotniku. Oglejmo si Pitagorov izrek, višinski izrek in Talesov izrek o kotu v polkrogu.

2.3.1 Pitagorov izrek

Pitagorov izrek so za konstrukcijo pravega kota poznali že v Egiptu in Babilonu okrog leta 1700 pr. n. št. Uporabljali so predvsem pravokotni trikotnik, ki je imel stranice v razmerju 3 : 4 : 5. Pitagora je dokazal, da je formula Pitagorovega izreka dokazljiva na vsakem pravokotnem trikotniku.

Naj bosta a in b kateti pravokotnega trikotnika, c pa njegova hipotenuza. Tedaj je vsota kvadratov katet enaka kvadratu hipotenuze.

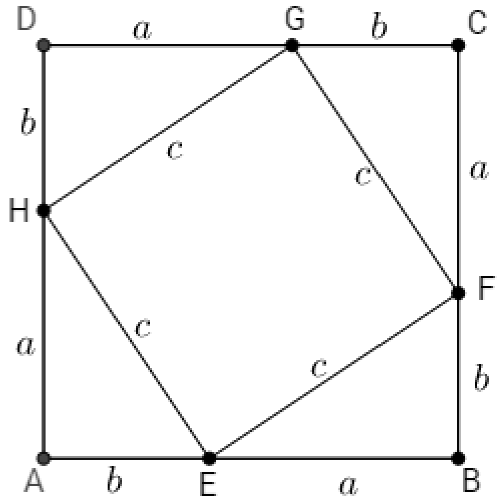
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$



Slika 4: Pitagorov izrek v pravokotnem trikotniku

Znanih je več kot 100 dokazov Pitagorovega izreka. Mi se bomo lotili dokaza računanjem ploščine kvadratu včrtanega kvadrata, pri čemer bomo uporabili znanje o kvadriranju dvočlenika.

V kvadrat $ABCD$ s stranico $a + b$ včrtamo kvadrat $EFGH$ s stranico c, kot kaže slika. Pri tem nastanejo štirje pravokotni trikotniki s katetama a in b in hipotenuzo c.



Slika 5: Dokaz Pitagorovega izreka

Ploščino kvadrata $EFGH$ bomo izračunali tako, da bomo od ploščine kvadrata $ABCD$ odšteli štirikratnik ploščine enega izmed štirih skladnih pravokotnih trikotnikov s katetama a in b.

$$c^2 = (a + b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

Zapis poenostavimo s kvadriranjem dvočlenika.

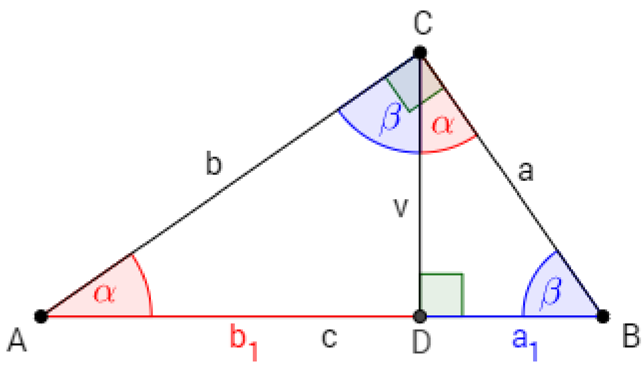
$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

2.3.2 Višinski izrek

S pomočjo višinskega izreka izračunamo višino pravokotnega trikotnika.

Produkt pravokotne projekcije katet na hipotenuzo je enak kvadratu višine na hipotenuzo.



Slika 6: Višinski izrek

Višinski izrek bomo dokazali s pomočjo podobnih trikotnikov.

Višina na hipotenuzo razdeli hipotenuzo trikotnika na dva dela in trikotnik na dva manjša pravokotna trikotnika ADC in CDB, ki sta podobna prvotnemu trikotniku ABC.

Označimo:

v … višina na hipotenuzo$c$

a, b, c … stranice pravokotnega trikotnika

a_1… pravokotna projekcija stranice a na hipotenuzo c

b_1… pravokotna projekcija stranice b na hipotenuzo c

Koti v trikotniku ΔADC so skladni s koti v trikotniku ΔCDB, zato sta trikotnika ACD in CDB podobna (slika 6).

$$\Delta ADC \sim \Delta BDC$$

Zapišemo sorazmerje istoležnih stranic v podobnih trikotnikih ACD in CDB.

$$a_1 : v = v : b_1$$

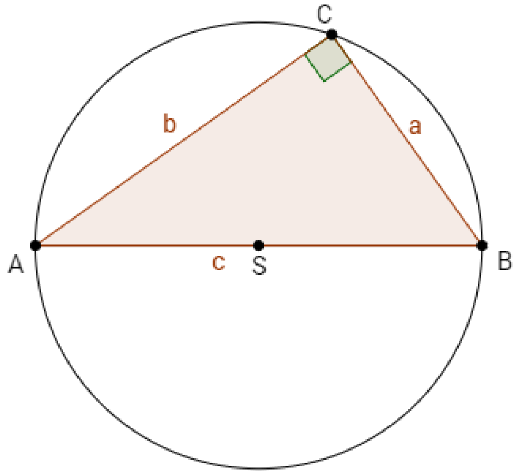
Poenostavimo sorazmerje in izrazimo višino.

$$v^2 = a_1 \cdot b_1$$

Pokazali smo, da je v pravokotnem trikotniku kvadrat višine enak produktu pravokotnih projekcij katet na hipotenuzo.

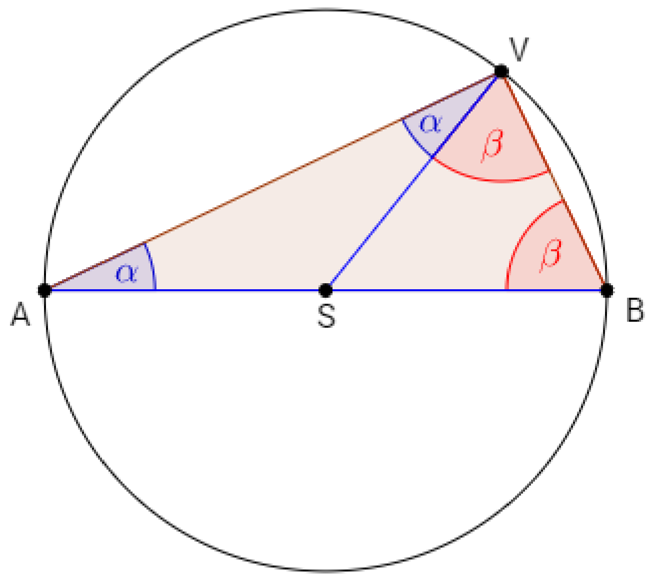
2.3.3 Talesov izrek o kotu v polkrogu

Če je osnovnica trikotnika premer kroga in tretje oglišče leži na krožnici, takrat je trikotnik pravokoten.



Slika 7: Talesov izrek o kotu v polkrogu

Za Talesov izrek obstaja več dokazov. Mi bomo za dokaz uporabili znanje o kotih v trikotnikih.



Slika 8: Dokaz Talesovega izreka o kotu v polkrogu

V trikotnikih VAS in BVS velja $|AS| = |SV|$ in $|BS| = |VS|$, zato sta trikotnika VAS in BVS enakokraka.

V trikotniku VAS imamo dva kota α in kot $\sphericalangle VSA$.

V trikotniku BVS imamo dva kota β in kot $\sphericalangle BSV$.

Kota $\sphericalangle VSA$ in $\sphericalangle BSV$ sta sokota, zato je njuna vsota $180\,°$.

Vsota notranjih kotov poljubnega trikotnika meri $180\,°$, zato je vsota notranjih kotov obeh trikotnikov $2 \cdot 180\,° = 360\,°$.

Vsoto notranjih kotov obeh trikotnikov zapišemo z notranjimi koti trikotnikov VAS in BVS.

$$360\,° = 2\alpha + \sphericalangle VSA + 2\beta + \sphericalangle BSV = 2\alpha + 2\beta + 180\,°$$

Enačbo uredimo

$$2\alpha + 2\beta = 180\,°$$

in jo delimo z 2.

$$\alpha + \beta = 90\,°$$

Iz tega sledi, da meri kot z vrhom na krožnici $90\,°$.

Talesov izrek uporabljamo za različne konstrukcije, med drugim tudi za konstrukcijo tangente na krožnico.

3 ARBELOS

Izhodišče raziskovalne naloge predstavlja arbelos, zato se bomo seznanili z definicijo arbelosa in nekaterimi njegovimi lastnostmi.

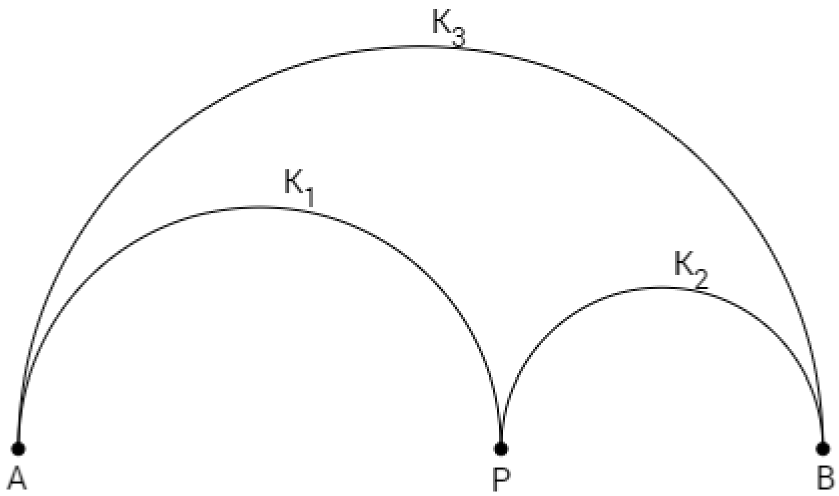
Ime arbelos izhaja iz grške besede άρβυλος (Baos, 2006), kar pomeni **čevljarski nož.** Starodavni čevljarji so namreč uporabljali rezilo noža, ki ima podobno obliko kot arbelos.

Slika 9: Čevljarski nož

Arbelos je lik, omejen s tremi paroma dotikajočimi se polkrogi, katerih središča so kolinearna. Dotikališčem polkrogov A, P in B pravimo konice arbelosa.

Zgornja mejna krivulja arbelosa, ki omejuje polkrog z največjim polmerom, je polkrog K_1. Spodnji mejni krivulji arbelosa, ki omejujeta preostala včrtana kroga, sta polkroga K_2 in K_3.

Vsota premerov manjših dveh polkrogov K_2 in K_3 je enak premeru največjega polkroga K_1.



Slika 10: Arbelos

V nadaljevanju bomo v arbelosu uporabljali naslednje oznake:

K_1 ... levi včrtani polkrog

K_2 ... desni včrtani polkrog

K_3 ... največji polkrog, ki omejuje arbelos

P ... izbrana točka na daljici AB

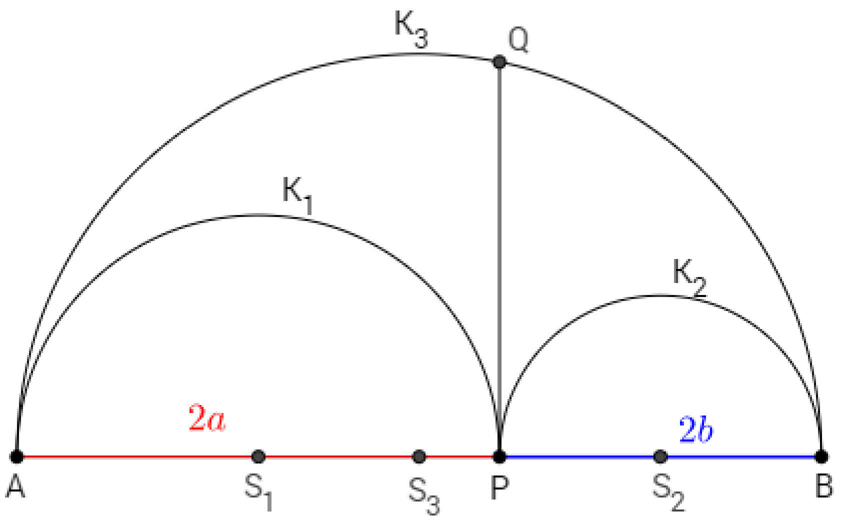
$2a$ ... premer levega polkroga K_1, ki je enak $|AP|$

$2b$ ... premer desnega polkroga K_2, ki je enak $|PB|$

$2a + 2b$ ... premer največjega polkroga K_3, ki je enak $|AB|$

S_1, S_2, S_3 ... središča polkrogov K_1, K_2, K_3

Q ... presečišče tangente notranjih dveh polkrogov z največjim polkrogom K_3



Slika 11: Oznake v arbelosu

Oglejmo si tri lastnosti arbelosa.

1. Spodnja in zgornja mejna krivulja arbelosa imata enaki dolžini.

Dolžina zgornje krivulje arbelosa l_Z je enaka polovici obsega kroga s polmerom $a + b$.

$$l_Z = \pi(a + b)$$

Dolžina spodnje krivulje arbelosa l_S pa je enaka vsoti dolžin krivulj K_1 in K_2 s polmeroma a in b.

$$l_S = \pi a + \pi b = \pi(a + b)$$

Pokazali smo, da imata spodnja in zgornja mejna krivulja res enaki dolžini.

2. Obseg arbelosa je enak obsegu kroga s premerom $|AB|$.

To lastnost je odkril nemški matematik Thomas Schoch leta 1998.

Označimo dolžine lokov in obsegov krogov:

l_1 ... dolžina loka AP

l_2 ... dolžina loka PB

l_3 ... dolžina loka AB

o_1 ... obseg kroga s premerom AP

o_2 ... obseg kroga s premerom PB

o_3 ... obseg kroga s premerom AB

Obseg arbelosa je enak vsoti dolžin lokov, ki omejujejo arbelos.

$$l_1 = \frac{o_1}{2} = \frac{2\pi a}{2} = \pi a$$

$$l_2 = \frac{o_2}{2} = \frac{2\pi b}{2} = \pi b$$

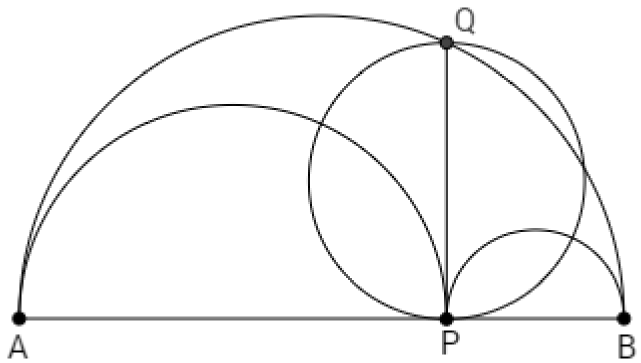
$$l_3 = \frac{o_3}{2} = \frac{2\pi(a+b)}{2} = \pi(a+b)$$

Obseg arbelosa izrazimo tako, da seštejemo vse tri dolžine lokov.

$$o_{ARBELOS} = \pi a + \pi b + \pi(a+b) = 2\pi(a+b)$$

Dobljen obseg je enak obsegu kroga s premerom AB.

3. Ploščina arbelosa je enaka $\boldsymbol{\pi ab}$ in je enaka ploščini kroga s premerom $|PQ|$.



Slika 12: Ploščina arbelosa

Vpeljimo oznake:

S … ploščina arbelosa

S_1 … ploščina polkroga s polmerom a

S_2 … ploščina polkroga s polmerom b

S_3 … ploščina polkroga s polmerom $a + b$

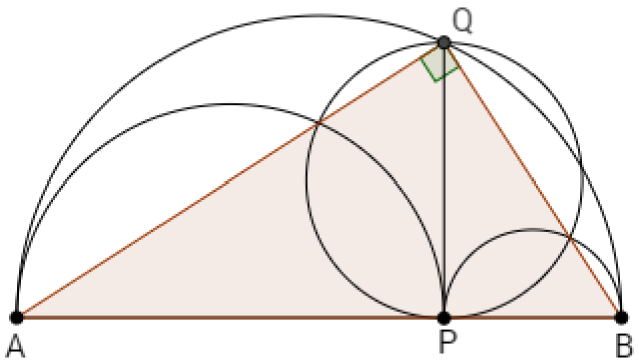
S_{PQ} … ploščina polkroga s premerom PQ

Ploščino arbelosa bomo izrazili tako, da bomo od ploščine največjega polkroga odšteli vsoto ploščin manjših polkrogov.

$$
\begin{aligned}
&S = S_3 - (S_1 + S_2) \\
&= \frac{\pi}{2}(a+b)^2 - \left(\frac{\pi}{2}a^2 + \frac{\pi}{2}b^2\right) = \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

Ploščina arbelosa je enaka πab.

Ploščino kroga s premerom PQ bomo poiskali s pomočjo trikotnika ΔABQ.



Slika 13: Ploščina kroga s premerom PQ

Po Talesovem izreku o kotu v polkrogu je kot $\sphericalangle AQB$ pravi kot. Daljica PQ je višina pravokotnega trikotnika ΔABQ. Z uporabo višinskega izreka v tem pravokotnem trikotniku lahko izrazimo višino trikotnika s premeroma polkrogov K_1 in K_2.

$$|PQ| = \sqrt{2a \cdot 2b} = \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$$

Izračunajmo ploščino kroga s premerom $|PQ|$.

$$S_{PQ} = \pi \cdot \left(\frac{|PQ|}{2}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{ab}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \sqrt{ab}^2 = \pi ab$$

Ploščina kroga s premerom $|PQ|$ je enaka πab, kar je enako ploščini arbelosa.

4 ARHIMED

Arhimed je bil grški matematik, izumitelj, fizik, astronom, mehanik in inženir. Rojen je bil v Sirakuzah na Siciliji leta 287 pr. n. št. Navdih za astronomijo je dobil od očeta Fidija, ki je tudi sam svoje življenje posvečal astronomiji. Zaradi očetovega vpliva je njegovo izobraževanje potekalo v Aleksandriji in Egiptu. Po zaključenem študiju se je vrnil domov in tam prevzel delo inženirja vojnih strojev za svojega sorodnika, kralja Hierona II.

Slika 14: Arhimed

Svoje življenje je Arhimed posvečal predvsem geometriji, znanosti in principom mehanike. Z velikim uspehom se je lotil računanja ploščin geometrijskih likov in prostornin teles. Po Arhimedovi zaslugi veliko lažje razumemo gravitacijo, hidrostatiko in vzgon ter delovanje različnih orodij, kot npr. škripec in vzvod. Natančno je preučil delovanje vzvoda in škripčevja in ga zapisal v obliki zakona, ki ga danes poznamo kot izrek o ravnovesju navorov. Ugotovil je obratno sorazmerje sile in ročice. S tem odkritjem je ustvaril temelje statike, s katero si je pomagal pri reševanju geometrijskih nalog. Kasneje je znanje o statiki dopolnil še Heron.

Veliko orodij, ki jih je izumil Arhimed, uporabljamo še danes. Med njimi tudi hidravlični polžasti vijak, t. i. Arhimedov vijak, namenjen za prenos vode iz nižjih predelov v višje. Danes ga uporabljamo za pretakanje vode iz nižje ležečih voda (rek, jezer, morij) v namakalne sisteme.

Izračunal je število peščenih zrn, ki bi jih potrebovali, da bi z njimi napolnili celotno vesolje. S tem je predpostavil velikost vesolja. Hotel je dokazati, da je mogoče izračunati in izmeriti vse, kar v resnici obstaja. Pri računanju je za izražanje velikih števil uporabljal poseben sestav, ki je bil skoraj tak kot sodobna potenčna (eksponentna) oblika.

Okoli leta 230 pr. n. št. je v svojem delu *Merjenje kroga* našel približek za obseg kroga z včrtanimi in očrtanimi pravilnimi mnogokotniki s 6, 12, 24, 48 in 96 stranicami. Ko je razširil približek na mnogokotnike s številom stranic, je odkril približek za število π.

$$\pi = 3{,}14185110664$$

S sistemom neskončnosti, kot ga je Arhimed poimenoval sam, je bil prvi, ki je zapisal nekatere znane formule, ki jih uporabljamo še danes. Od teh sta najbolj znani formuli za izračun obsega ($o = 2\pi r$) in ploščine kroga ($p = \pi r^2$). Zapisal pa je tudi formulo za izračun prostornine krogle.

Njegovo odkritje - izrek o vzgonu, ki pravi, da se teža potopljenega telesa navidezno zmanjša ravno za težo izpodrinjene tekočine, imenujemo Arhimedov zakon in ga še danes uporabljamo za določanje gostote snovi in proučevanje plavanja teles. To odkritje obkroža veliko anekdot. Ena izmed najbolj znanih pravi, da se je nekega dne kopal v banji. Ko se je ulegel v zvodo napolnjeno banjo, jo je nekaj steklo čez rob, nato je doumel, da je iz banje izteklo natanko toliko vode, kolikor meri prostornina njegovega telesa. Od navdušenja nad odkritjem je menda po ulicah tekel gol, ob tem pa je vzklikal »Heureka!« To spoznanje je uporabil, ko mu je kralj Hieron II. naročil, naj preveri, če je njegova krona narejena iz čistega zlata, ali so ga ogoljufali. Arhimed je krono in enako količino zlata potopil v vodo in odčital razliko. Odkril je, da je v kroni tudi srebro in kralju dokazal, da so gaogoljufali. Zlatarja je goljufija stala življenja.

V svojem življenju se je rad posvečal praktičnim stvarem, zato je nekoč dejal: »Dajte mi točko in premaknil bom svet.« Sam kralj ga je nato izzval, da svojo trditev dokaže, a se je odločil, da mu ni treba premakniti sveta. Namesto tega si je Arhimed izbral natovorjeno ladjo ter jo s sestavo vzvodov brez večjega napora dvignil in jo iz pristanišča premaknil na drugi konec obale. Na svoje izume ni bil preveč ponosen, saj je bil mnenja, da le ti ne predstavljajo del pravega filozofa. S tem mišljenjem je objavljal le svoja matematična dela. Na področju ravninske geometrije so najbolj znana dela *Meritve kroga (Merjenje kroga)*, *Kvadratura parabole* in *Spirale (O spiralah).*

Arhimed je konstruiral tudi veliko novih tehničnih naprav, ki so jih uspešno uporabili v vojni z Rimljani. Zgradil je največjo ladjo starega veka (Aleksandrejo) in z zrcali ter vžigalnimi lečami zažigal ladje, ki so napadale ter oblegale Sirakuze. Eden izmed njegovih največjih izumov glede konstruiranja vojnih strojev je Arhimedov krempelj ali t. i. Železna roka in Tat, s katerim so prestregali ladje, ki so želele brez dovoljenja vstopiti v Sirakuško pristanišče. Arhimedov krempelj je bil sestavljen iz kombinacij kljuk, kablov, škripcev ter vzvoda. Krempelj je ladje ustavil, dvignil in vrgel v morje.

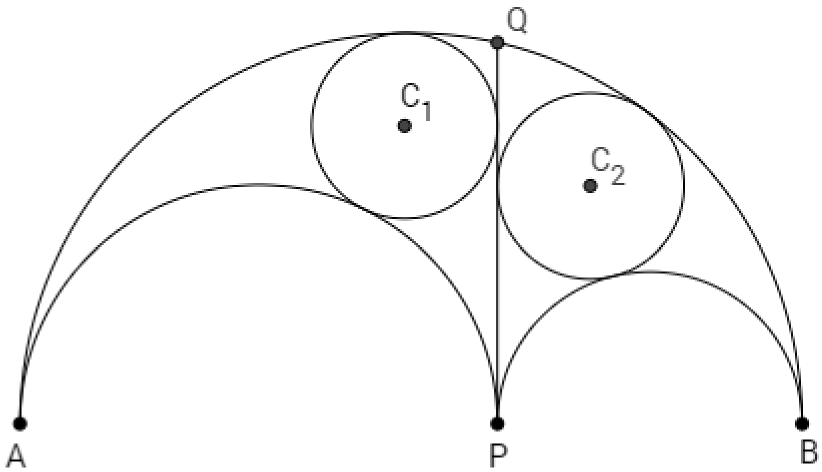
Zaradi vseh uspešnih vojaških izumov so ga Rimljani po zavzetju Sirakuz hoteli živega pripeljati pred oblast, a neuspešno. Ravno ko se je sklanjal nad narisanimi geometrijskimi liki v pesku, ga je zmotil rimski vojak in zahteval, naj gre z njim. Arhimed ga je ukazovalno odslovil z besedami: "*NOLI TURBARE CIRCULUS MEOS*" (ne moti mojih krogov). Vojak se je ob tem razjezil in ga leta 212 pr. n. št. ubil.

Slika 15: Smrt Arhimeda

5 ARHIMEDOVA DVOJČKA

V arbelos lahko vrišemo številne kroge: Schochova kroga, Papusovo verigo, Bankoffov krog, Apolonijev krog, Woojev krog … Med najpomembnejšimi krogi pa sta tudi Arhimedova dvojčka.

Daljica PQ razdeli arbelos na dva dela. Kroga, ki se dotikata daljice PQ, večjega polkroga K_3 in po enega izmed manjših polkrogov K_1 in K_2, imenujemo ARHIMEDOVA DVOJČKA.



Slika 16: Arhimedova dvojčka

V nadaljevanju bomo pokazali Arhimedovo trditev, da imata Arhimedova dvojčka enak polmer.

$$\boldsymbol{r = \frac{ab}{a+b}}$$

S pomočjo Pitagorovega izreka v pravokotnem trikotniku bomo poiskali polmera in središča obeh krogov.

5.1 Polmer Arhimedovih dvojčkov

Polmera obeh krogov bomo izrazili s polmeri polkrogov arbelosa K_1, K_2 in K_3.

Vpeljimo oznake:

C_1 … središče levega kroga

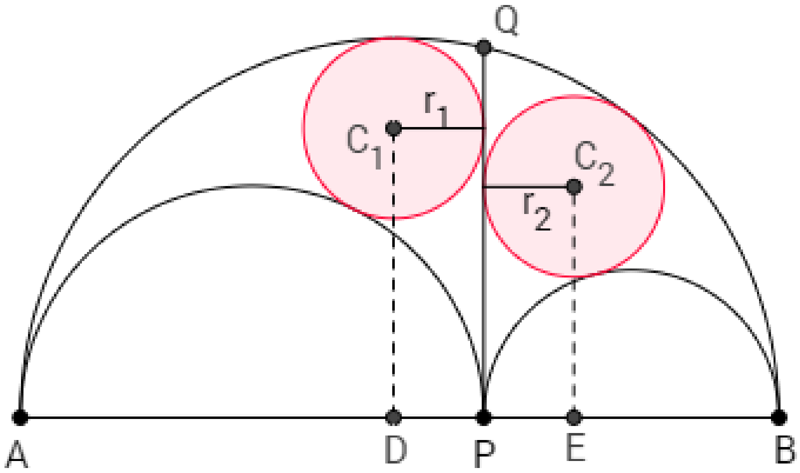
C_2 … središče desnega kroga

r_1 … polmer levega kroga

r_2 … polmer desnega kroga

D … pravokotna projekcija središča C_1 na premer AB

E … pravokotna projekcija središča C_2 na premer AB



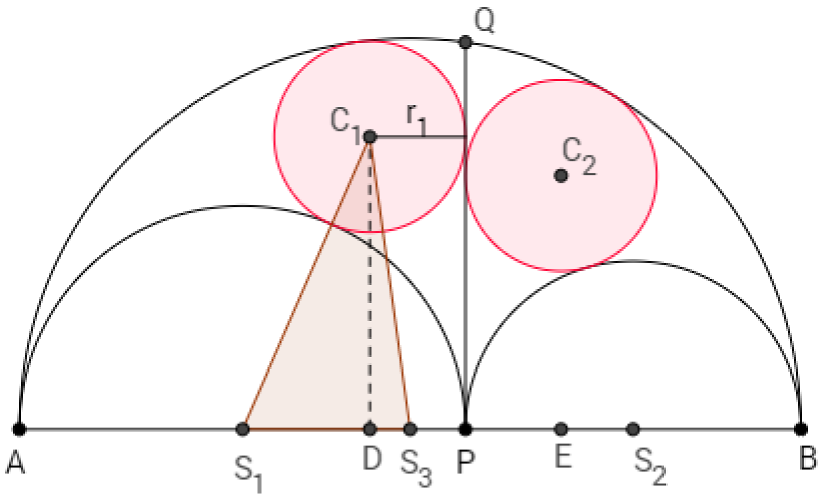
Slika 17: Oznake Arhimedovih dvojčkov

Polmer levega kroga Arhimedovih dvojčkov r_1

V arbelos vrišemo trikotnik $\Delta S_1S_3C_1$, v katerem bomo s pomočjo Pitagorovega izreka izrazili višino DC_1 na dva načina. Višina DC_1 razdeli trikotnik $\Delta S_1S_3C_1$ na dva pravokotna trikotnika.

Izrazimo posamezne stranice obeh pravokotnih trikotnikov ΔS_1DC_1 in ΔDS_3C_1 s polmeri polkrogov v arbelosu in polmerom levega kroga Arhimedovih dvojčkov.

$|S_1C_1| = a + r_1$ $\quad$ $|S_1D| = a - r_1$ $\quad$ $|S_3C_1| = a + b - r_1$ $\quad$ $|S_3D| = b - a + r_1$



Slika 18: Izračun polmera levega kroga Arhimedovih dvočjkov

Zapišemo Pitagorov izrek za izračun višine DC_1 na dva načina.

$$|DC_1|^2 = |S_1C_1|^2 - |S_1D|^2$$
$$|DC_1|^2 = (a + r_1)^2 - (a - r_1)^2$$
$$|DC_1|^2 = 4ar_1$$

$$|DC_1|^2 = |S_3C_1|^2 - |S_3D|^2$$
$$|DC_1|^2 = (a + b - r_1)^2 - (b - a + r_1)^2$$
$$|DC_1|^2 = 4ab - 4br_1$$

Dobljena rezultata enačimo, enačbo delimo s 4 in dobimo

$$ar_1 = ab - br_1.$$

S poenostavitvijo izraza dobimo polmer levega kroga Arhimedovih dvojčkov.

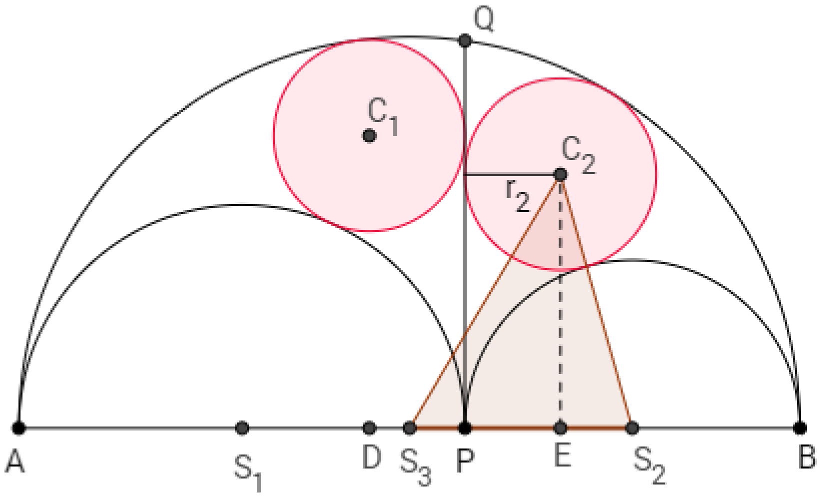
$$r_1 = \frac{ab}{a + b}$$

Polmer desnega kroga Arhimedovih dvojčkov r_2

Na podoben način izrazimo polmer desnega kroga Arhimedovih dvojčkov.

V arbelos vrišemo trikotnik $\Delta S_3S_2C_2$ in ga z višino EC_2 razdelimo na dva pravokotna trikotnika. Najprej izrazimo posamezne stranice pravokotnih trikotnikov ΔS_3EC_2 in ΔES_2C_2 s polmeri polkrogov v arbelosu in polmerom desnega kroga Arhimedovih dvojčkov.

$|S_2C_2| = b + r_2$ $\quad$ $|S_2E| = b - r_2$ $\quad$ $|S_3C_2| = a + b - r_2$ $\quad$ $|S_2E| = a - b + r_2$



Slika 19: Izračun polmera desnega kroga Arhimedovih dvočjkov

Zapišemo Pitagorov izrek za izračun višine EC_2 na dva načina.

$$|EC_2|^2 = |S_2C_2|^2 - |S_2E|^2$$
$$|EC_2|^2 = (b + r_2)^2 - (b - r_2)^2$$
$$|EC_2|^2 = 4br_2$$

$$|EC_2|^2 = |S_3C_2|^2 - |S_3E|^2$$
$$|DC_1|^2 = (a + b - r_2)^2 - (a - b + r_2)^2$$
$$|DC_1|^2 = 4ab - 4ar_2$$

Dobljena rezultata enačimo, dobljeno enačbo delimo s 4 in dobimo

$$br_2 = ab - ar_2.$$

S poenostavitvijo izraza dobimo polmer desnega kroga Arhimedovih dvojčkov.

$$r_2 = \frac{ab}{a + b}$$

Pokazali smo Arhimedovo trditev, da sta polmera obeh krogov enaka. V nadaljevanju bomo ugotovili, da sta polmera Arhimedovih dvojčkov povezana s harmonično sredino števil a in b.

5.2 Središči Arhimedovih dvojčkov

V tem delu bomo določili koordinati središč Arhimedovih dvojčkov.

Za preglednejše izračune koordinatni sistem v ravnini postavimo tako, da bo leva konica arbelosa (točka A) v koordinatnem izhodišču, desna konica arbelosa (točka B) pa bo imela koordinati $B(1,0)$.

Za lažje iskanje središč lahko glede na lego arbelosa in oznake v 3. poglavju polmer Arhimedovih dvojčkov zapišemo s polmerom levega polkroga arbelosa.

Premer večjega polkroga arbelosa $|AB| = 1$, zato je

$$2a + 2b = 1 \text{ oz. } a + b = \frac{1}{2}.$$

Polmer Arhimedovih dvojčkov označimo z r.

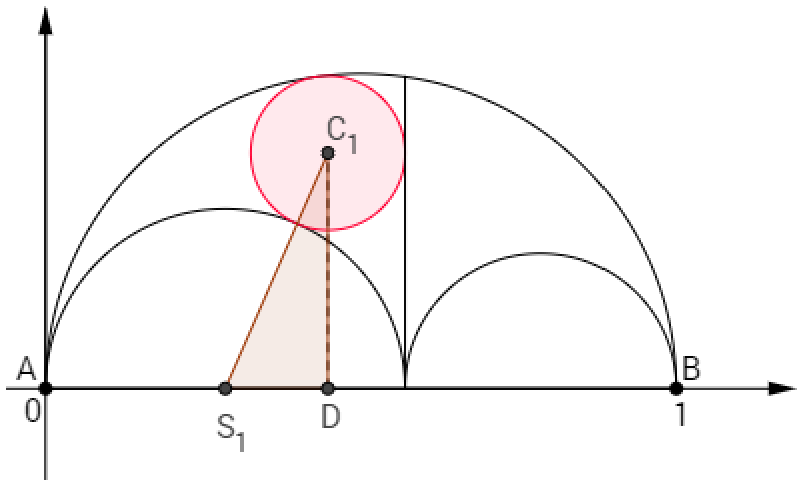
$$r = \frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{a \cdot \left(\frac{1}{2} - a\right)}{a + \left(\frac{1}{2} - a\right)} = a(1 - 2a)$$

V nadaljevanju izračuna središč bomo za polmer r uporabljali

$$r = a(1 - 2a).$$

Središči Arhimedovih dvojčkov bomo določili z uporabo Pitagorovega izreka v pravokotnih trikotnikih, kjer sta hipotenuzi razdalji od središč dvojčkov do središč manjših polkrogov, daljša kateta pa je dolžina pravokotne projekcije središč na premer AB.

Središče levega kroga Arhimedovih dvojčkov



Slika 20: Središče levega kroga Arhimedovih dvojčkov

Središče levega kroga Arhimedovih dvojčkov bomo poiskali v pravokotnem trikotniku ΔS_1DC_1.

Abscisa središča je enaka razdalji $|AD|$:

$$|AD| = 2a - r.$$

Vstavimo $r = a(1 - 2a)$ in dobimo, da je abscisa x enaka:

$$\boldsymbol{x = a(1 + 2a).}$$

Ordinata središča y je enaka razdalji $|DC_1|$ (daljši kateti v trikotniku S_1DC_1), ki jo izrazimo s Pitagorovim izrekom. $|S_1C_1|$ je hipotenuza, $|S_1D|$ pa krajša kateta pravokotnega trikotnika S_1DC_1.

$$|S_1C_1| = a + r$$

$$|S_1D| = a - r$$

Zapišemo Pitagorove izrek.

$$|DC_1|^2 = |S_1C_1|^2 - |S_1D|^2$$
$$|DC_1|^2 = (a + r)^2 - (a - r)^2$$
$$|DC_1|^2 = 4ar$$
$$|DC_1| = 2\sqrt{ar}$$

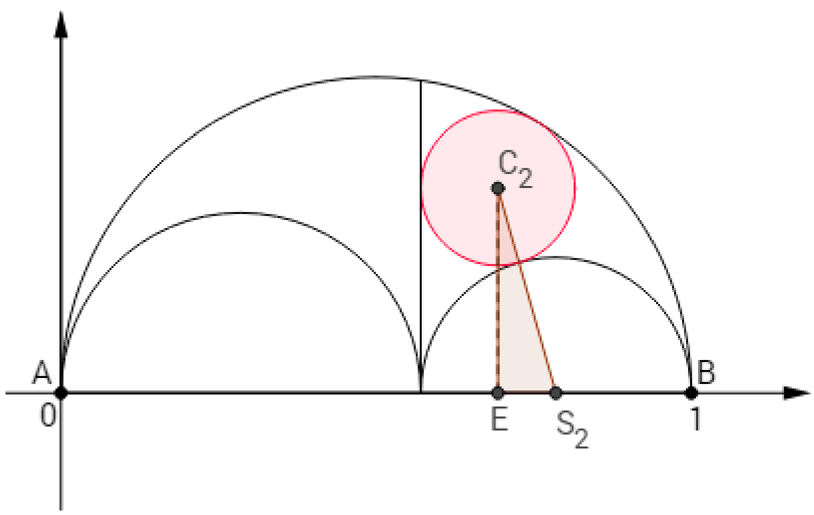
V dobljeno dolžino vstavimo $r = a(1 - 2a)$ in dobimo, da je ordinata y enaka

$$y = 2\sqrt{a \cdot a(1 - 2a)} = 2a\sqrt{1 - 2a}.$$

Poiskali smo središče levega kroga Arhimedovih dvojčkov.

$$\boldsymbol{C_1\left(a(1 + 2a), 2a\sqrt{1 - 2a}\right)}$$

Središče desnega kroga Arhimedovih dvojčkov



Slika 21: Središče desnega kroga Arhimedovih dvojčkov

Središče desnega kroga Arhimedovega dvojčka bomo poiskali v pravokotnem trikotniku ΔES_2C_2.

Abscisa središča je enaka razdalji $|AE|$:

$$|AE| = 2a + r.$$

Vstavimo $r = a(1-2a)$ in dobimo, da je abscisa x enaka:

$$\boldsymbol{x = a(3-2a)}.$$

Ordinata središča y je enaka razdalji $|EC_2|$ (daljši kateti v trikotniku ES_2C_2), ki jo izrazimo s Pitagorovim izrekom. $|S_2C_2|$ je hipotenuza, $|S_2E|$ pa krajša kateta pravokotnega trikotnika ES_2C_2.

$$|S_2C_2| = b + r$$

$$|S_2E| = b - r$$

Zapišemo Pitagorove izrek.

$$|EC_2|^2 = |S_1C_1|^2 - |S_2E|^2$$
$$|EC_2|^2 = (b+r)^2 - (b-r)^2$$
$$|EC_2|^2 = 4br$$
$$|EC_2| = 2\sqrt{br}$$

V dobljeno dolžino vstavimo $r = a(1-2a)$ in $b = \frac{1-2a}{2}$. S tem dobimo ordinato y.

$$y = 2\sqrt{\left(\frac{1-2a}{2}\right) \cdot a(1-2a)} = (1-2a)\sqrt{2a}$$

Poiskali smo središče desnega kroga Arhimedovih dvojčkov.

$$\boldsymbol{C_2\big(a(3-2a), (1-2a)\sqrt{2a}\big)}$$

5.3 Analiza konstrukcije Arhimedovih dvojčkov

Arhimedova dvojčka bomo konstruirali v treh korakih. V prvem delu bomo konstruirali polmer Arhimedovih dvojčkov, v drugem delu središči obeh krogov in na koncu še oba kroga.

Za konstrukcijo polmerov bomo uporabili harmonično sredino dveh nenegativnih števil. Pri izpeljavi polmerov Arhimedovih dvojčkov smo omenili, da je polmer $r = \frac{ab}{a+b}$ povezan s harmonično sredino števil a in b.

V nadaljevanju bomo potrdili zgornjo trditev.

5.4 Harmonična sredina dveh pozitivnih števil

Harmonična sredina H je ena od treh pitagorejskih sredin.

Harmonična sredina dveh pozitivnih števil $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$ je recipročna vrednost povprečja $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}$ in $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}$.

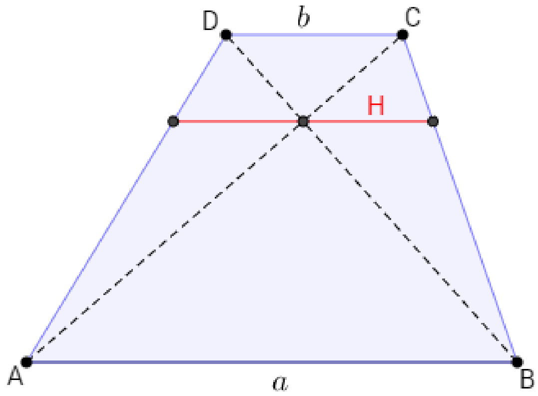
$$\boldsymbol{H} = \frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b}}} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}$$

V splošnem je harmonična sredina določena tudi za več pozitivnih števil $a_1, a_2, \dots\ a_n$, in sicer kot:

$$H(a_1, a_2, \dots\ a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Harmonična sredina je hkrati obratna vrednost aritmetične sredine obratnih vrednosti in jo lahko geometrijsko predstavimo s trapezom.

Poglejmo si dokaz trditve, da je v trapezu z osnovnicama $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$ dolžina daljice, ki poteka skozi presečišče diagonal trapeza in je vzporedna osnovnicama $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$, harmonična sredina števil $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$.



Slika 22: Harmonična sredina v trapezu

Za dokaz trditve potrebujemo znanje o ploščini trapeza, o podobnih trikotnikih in razmerjih v podobnih trikotnikih, ki smo jih predstavili v uvodu raziskovalne naloge.

Trapez $ABCD$ s pomočjo daljice FG, ki poteka skozi presečišče diagonal in je vzporedna osnovnicama trapeza, razdelimo na dva trapeza $ABGF$ in $FGCD$ (slika 23).

S pomočjo ploščin posameznega trapeza bomo izračunali dolžino daljice FG.

Vpeljimo oznake:

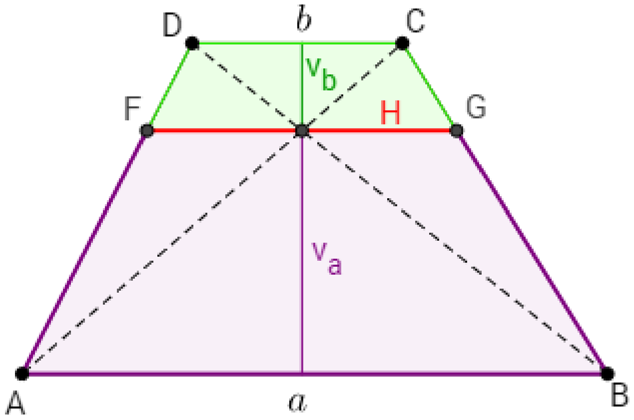
a … osnovnica trapeza $ABCD$ in $ABFG$

b … osnovnica trapeza $ABCD$ in $FGCD$

v_a ... višina trapeza $ABFG$

v_b ... višina trapeza $FGCD$

v ... višina trapeza $ABCD$

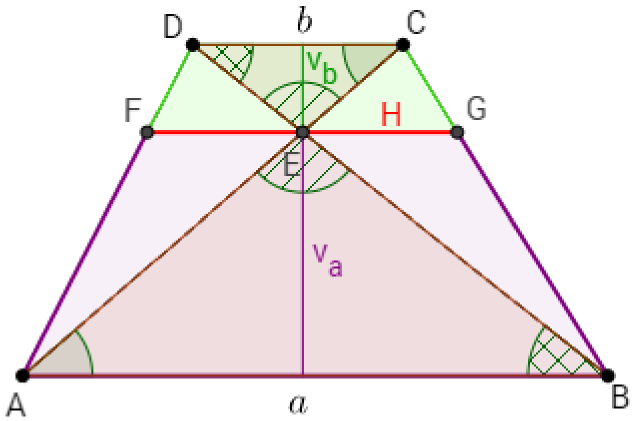


Slika 23: Trapeza $ABGF$ in $FGCD$

Ploščina celotnega trapeza $ABCD$ je enaka vsoti ploščin trapezov $ABGF$ in $FGCD$. Upoštevamo, da je $v = v_a + v_b$.

$$\frac{(a+b)}{2} \cdot v = \frac{(a+|FG|)}{2} \cdot v_a + \frac{(|FG|+b)}{2} \cdot v_b$$

V trikotniku ABE in CDE so paroma vsi koti skladni, zato sta trikotnika podobna (slika 24).



Slika 24: Podobna trikotnika ABE in CDE

Na podlagi podobnosti lahko zapišemo razmerje

$$a : v_a = b : v_b$$

in izrazimo eno izmed višin:

$$v_b = \frac{b \cdot v_a}{a}.$$

Dobljeno višino vstavimo v formulo za višino v.

$$v = v_a + v_b = v_a + \frac{b \cdot v_a}{a}$$

Poenostavimo zapis in dobimo, da je

$$v_a = \frac{v \cdot a}{a + b}.$$

Tudi v_b izrazimo z v, a in b.

$$v_b = \frac{v \cdot b}{a + b}$$

Dobljeni višini vstavimo v enačbo za ploščino celotnega trapeza.

$$\frac{(a+b)}{2} \cdot v = \frac{(a + |FG|)}{2} \cdot v_a + \frac{(|FG| + b)}{2} \cdot v_b$$
$$\frac{(a+b)}{2} \cdot v = \frac{(a + |FG|)}{2} \cdot \frac{v \cdot a}{a+b} + \frac{(|FG| + b)}{2} \cdot \frac{v \cdot b}{a+b}$$

Celotno enačbo množimo z $\frac{2(a+b)}{v}$, da poenostavimo enačbo.

$$(a+b)^2 = (a + |FG|) \cdot a + (b + |FG|) \cdot b$$

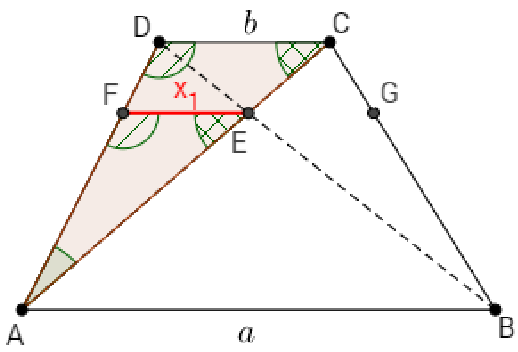
Iz enačbe izrazimo iskano dolžino $|FG|$.

$$|FG| = \frac{2ab}{a+b}$$

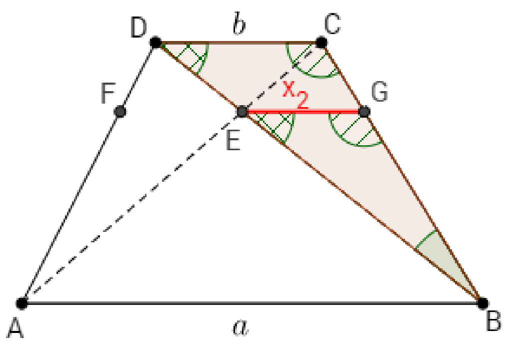
S tem smo pokazali, da je dolžina daljice $|FG|$ harmonična sredina dveh pozitivnih števil a in b ter je enaka premeru posameznega kroga Arhimedovih dvojčkov.

Za konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov moramo pokazati, da je razpolovišče harmonične sredine v presečišču diagonal trapeza.

Torej moramo dokazati, da je $|FE| = |EG|$. Označimo z $x_1 = |FE|$ in z $x_2 = |EG|$.



Slika 25: Podobna trikotnika AEF in ACD



Slika 26: Podobna trikotnika BGE in BCD

Iz slike 25 lahko zapišemo sorazmerje

$$b : x_1 = |AC| : |AE|$$

in izrazimo x_1.

$$x_1 = b \cdot \frac{|AE|}{|AC|}$$

Podobno lahko iz slike 26 zapišemo sorazmerje

$$b : x_2 = |BD| : |BE|$$

in izrazimo x_2.

$$x_2 = b \cdot \frac{|BE|}{|BD|}$$

Če pokažemo, da sta razdalji $\frac{|AE|}{|AC|}$ in $\frac{|BE|}{|DB|}$ enaki, potem bosta enaki tudi razdalji x_1 in x_2.

V dokazu prejšnje trditve smo povedali, da sta trikotnika ABE in CDE podobna (slika 24), zato lahko zapišemo sorazmerje.

$$|AE| : |EC| = |BE| : |ED|$$

$$\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BE|}{|ED|}$$

Dobljeno sorazmerje preuredimo.

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|EC|}{|ED|}$$

Za dokaz bomo uporabili lemo, ki smo jo uporabili že pri dokazu Talesovega izreka o sorazmerjih.

Naj bodo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, kjer je $b \neq 0, d \neq 0$ in $b \neq d$. Če velja, da je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, potem velja tudi

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Z upoštevanjem leme lahko sorazmerje zapišemo v tej obliki:

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|EC|}{|ED|} = \frac{|AE| + |EC|}{|BE| + |ED|} = \frac{|AC|}{|BD|}.$$

Iz tega sledi, da je:

$$\frac{|AE|}{|BE|} = \frac{|AC|}{|BD|}.$$

Dobljeno sorazmerje ponovno preuredimo in zapišemo kot

$$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|BE|}{|BD|}$$

Pokazali smo, da sta razdalji x_1 in x_2 enako dolgi, zato res velja, da je presečišče diagonal trapeza razpolovišče harmonične sredine.

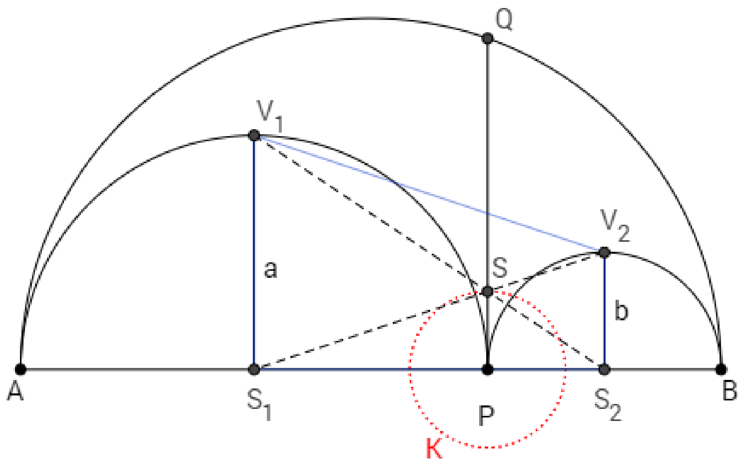
6 Konstrukcija Arhimedovih dvojčkov

Na podlagi dokazov v poglavju 5.4 najprej konstruiramo polmer, nato središči Arhimedovih dvojčkov in na koncu še oba kroga.

6.1.1 Konstrukcija polmerov

Konstrukcijski postopek:

1. V polkrogu K_1 označimo najvišjo točko polkroga z V_1; $|S_1V_1| = a$.
   V polkrogu K_2 označimo najvišjo točko polkroga z V_2; $|S_2V_2| = b$.
2. Konstruiramo diagonale trapeza $S_1S_2V_2V_1$.
3. S točko S označimo presečišče diagonal trapeza $S_1S_2V_2V_1$.
4. Polmer Arhimedovih dvojčkov je enak razdalji $|SP|$.



Slika 27: Konstrukcija polmera Arhimedovih dvojčkov

6.1.2 Konstrukcija središč

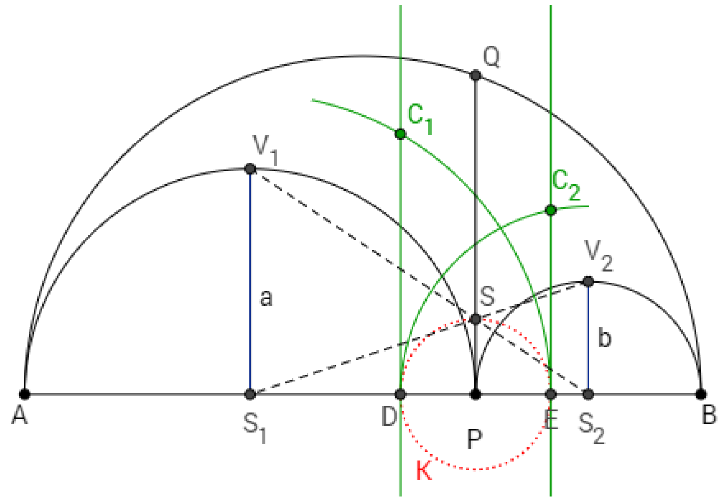
Z upoštevanjem Arhimedove trditve, ki smo jo dokazali v poglavju 5.1, vemo, da sta središči Arhimedovih dvojčkov oddaljeni od pravokotnice $|PG|$ za polmer $r_1 = r_2 = \frac{ab}{a+b}$, zato sta točki D in E pravokotni projekciji središč na premer večjega polkroga. Pokazali smo tudi, da je:

$$|S_1C_1| = |S_1E| = a + r_1$$

$$|S_2C_2| = |S_2D| = b + r_2$$

Konstrukcijski postopek:

1. Označimo točki D in E, kjer krožnica K seka premer večjega polkroga arbelosa.
2. Skozi dobljeni točki narišemo tangenti na krožnico K.
3. Iz točke S_1 konstruiramo krožni lok s polmerom $|S_1E|$ in presečišče krožnega loka z levo tangento označimo s C_1.
4. Iz točke S_2 konstruiramo krožni lok s polmerom $|S_2D|$ in presečišče krožnega loka z desno tangento označimo s C_2.



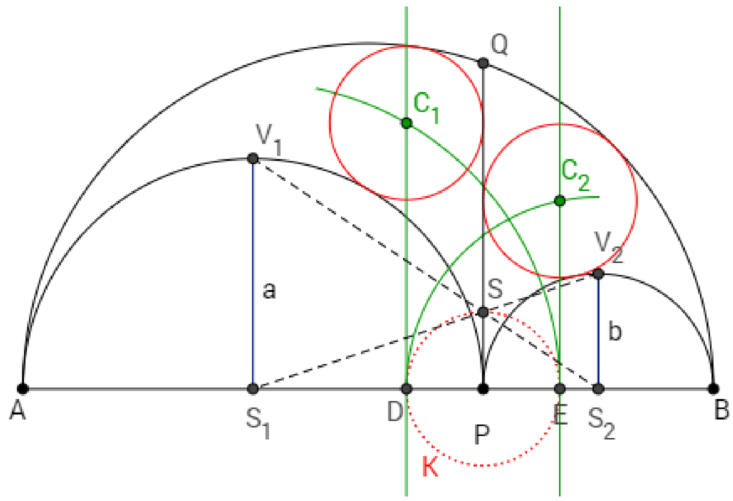
Slika 28: Konstrukcija središč Arhimedovih dvojčkov

6.1.3 Konstrukcija Arhimedovih dvojčkov

V analizi konstrukcije smo pokazali, da je razdalja $|PS|$ enaka polmeru Arhimedovih dvojčkov.

Konstrukcijski postopek:

1. Odmerimo razdaljo $|PS|$ in iz središča C_1 narišemo levi krog Arhimedovih dvojčkov.
2. Odmerimo razdaljo $|PS|$ in iz središča C_2 narišemo desni krog Arhimedovih dvojčkov.



Slika 29: Konstrukcija Arhimedovih dvojčkov

7 ZAKLJUČEK

Osnovni namen naše naloge je bil raziskati konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov v arbelosu. Že v začetku raziskovanja smo ugotovili, da bomo potrebovali številne izreke o trikotnikih in podobnosti, ki smo jih v osnovni šoli obravnavali pri pouku matematike.

V prvem delu raziskovalne naloge smo predstavili vse potrebne definicije in dokaze, ki smo jih potrebovali v nadaljevanju raziskovanja.

S pomočjo pisne in spletne literature smo v osrednjem delu utemeljili lastnosti arbelosa in Arhimedovih dvojčkov ter na podlagi le teh s programom Geogebra konstruirali ta zanimiva kroga.

Z raziskovanjem smo prvo hipotezo naše raziskovalne naloge lahko samo delno potrdile, saj nekaj izrekov v pravokotnem trikotniku v osnovni šoli še nismo spoznale. Z mentoričino razlago in ostalih virov smo potrebno znanje pridobile in uspele narisati geometrijsko konstrukcijo Arhimedovih dvojčkov. Tako smo lahko drugo hipotezo potrdile.

Pri našem raziskovanju smo naletele še na mnogo zanimivih krogov v arbelosu, za katere pa nismo imeli potrebnega matematičnega znanja za temeljitejšo analizo. Vse to lahko ostane naloga za v bodoče, vsekakor pa smo z raziskovanjem pridobili in utrdili ogromno znanja s področja matematike in uporabe programa Geogebra.

8 LITERATURA

Berk, J., Draklser, J., Robič, M., Sitar, I. in Kožuh, V. 2010. *Skrivnosti števil in oblik 9. Učbenik za matematiko v 9. Razredu osnovne šole.* Ljubljana: Rokus Klett.

Boas, H. P. 2006. *Reflections on the Arbelos.* Dostopno na http://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Chauvenet/Boas.pdf [04. 12. 2017]

Dolinar, G., 2003. *Neenakosti.* Brihtnež, letnik 0, stran 13. Dostopno na: https://www.dmfa.si/tekmovanja/Brihtnez/Brihtnez-0-3.pdf [13. 01. 2017]

Hill, B. 2015. *Archimedes: An Ancient Greek Genius Ahead of his time.* Dostopno na: http://www.ancient-origins.net/history-famous-people/archimedes-ancient-greek-genius-ahead-his-time-003690?page=0%2C1 [12. 11. 2016]

Lemež, N., 2016. *Arbelos.* Diplomsko delo. Maribor: Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.

Majcen, S., 2013. *Geometrijske konstrukcije kot realizacije algebraičnih izrazov.* Diplomsko delo. Maribor: Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko.

Pavlič, G., Kavka, D., Rugelj, M., Šparovec, J. 2011. *Planum novum. Matematika za gimnazije.* Ljubljana, Modrijan založba.

Powell, A. 1995. *Pythagorean Theorem.* Dostopno na: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml [04. 12. 2016]

Schoch, T. 2007. *Shoemaker's knife.* Dostopno na: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Arbelos_Shoemakers_Knife.jpg [12. 11. 2016]

Strnad, J., 1993. *Arhimed in sežig ladij.* Presek, letnik 21, strani 2-7. Dostopno na: http://www.presek.si/21/1160-Strnad.pdf [01. 02. 2017]

Yiu, P. 2005. *Elegan geometrical construction.* Forum Geometricorum, volume 5, page 75-96. Dostopno na: http://forumgeom.fau.edu/FG2005volume5/FG200512.pdf [12. 11. 2016]

Basic Proportionality Theorem. 2013. Dostopno na: http://www.ask-math.com/basic-proportionality-theorem.html [01. 03. 2017]

*Znani matematiki in njihova dela.*2004. Dostopno na: http://www.matematiki.si/arhimed/ [01. 02. 2017]