Mestna občina Celje

Komisija Mladi za Celje

PITAGOROV IZREK MALO DRUGAČE

RAZISKOVALNA NALOGA

AVTORICI

Nika Gračnar, Ella Damjanić

MENTORICA

Eva Iršič, prof. mat.

Celje, 2018

Osnovna šola Hudinja

Mariborska 125

PITAGOROV IZREK MALO DRUGAČE

RAZISKOVALNA NALOGA

Avtorici:

Nika Gračnar, 9. b

Ella Damjanić, 9. b

Mentorica:

Eva Iršič, prof. mat.

Mestna občina Celje, Mladi za Celje

Celje, 2018

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

POVZETEK

Pitagorov izrek je izrek v ravninski geometriji, ki je imenovan po Pitagori. Pitagora je bil starogrški filozof, mistik in matematik. Pitagorov izrek govori o ploščini kvadratov nad stranicami pravokotnega trikotnika. Velja namreč, da je ploščina kvadrata nad hipotenuzo enaka vsoti ploščin kvadratov nad katetama. Pitagorov izrek so že pred Pitagoro poznala mnoga ljudstva, npr. Babilonci, Grki, Kitajci …

S pomočjo raziskovalne naloge sva želeli Pitagorov izrek spoznati malo drugače. Kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika sva se odločili zamenjati s pravilnimi večkotniki in sicer enakostraničnim trikotnikom, pravilnim petkotnikom in pravilnim šestkotnikom.

Ugotovili sva, da z znanjem osnovnošolske matematike lahko dokaževa veljavnost Pitagorovega izreka za ploščine enakostraničnih trikotnikov, medtem ko bi za dokaz za pravilne petkotnike in pravilne šestkotnike morali znati še kaj več. Zato sva si pomagali z matematično aplikacijo Geogebra ter si neznane podatke izmerili in poskusili dokazati enakost.

Dokazali sva, da Pitagorov izrek velja za ploščine vseh pravilnih večkotnikov, ki sva si jih izbrali, predvidevava pa, da velja še za ostale pravilne večkotnike. Z dokazovanjem, računanjem in grafičnim prikazovanjem sva dokazali, da Pitagorov izrek sicer drži, a je veliko lažje uporabljati kvadrate, ker so obrazci ploščin pravilnih večkotnikov zahtevnejši kot obrazec ploščine kvadrata.

1. UVOD

Pitagorov izrek sodi med bolj znane izreke v ravninski geometriji. O njem sva že slišali, še preden sva vedeli, kaj pomeni oziroma o čem znani izrek govori. Ko smo se v 8. razredu učili o Pitagorovem izreku, naju je ta snov zelo pritegnila in začeli sva se bolj podrobno zanimati o njej. Najprej sva začeli po spletu brskati o zgodovini Pitagorovega izreka, letos pa sva se odločili, da bova s pomočjo raziskovalne naloge znanje o Pitagorovem izreku razširili.

Namen te raziskovalne naloge je namreč, da bi omenjeni izrek spoznali malo drugače, saj naju je zanimalo, ali izrek velja tudi, če kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika zamenjamo z drugimi pravilnimi večkotniki. Zato sva se hitro lotili dela in začeli raziskovati.

1.1. Opis raziskovalnega problema

Pred začetkom raziskovanja sva še enkrat ponovili snov Pitagorovega izreka iz učbenika za 8. razred. Ko sva bili prepričani, da snov dobro razumeva, sva poiskali še dodatno literaturo ter poiskali informacije o življenju Pitagore, zgodovini Pitagorovega izreka, preučili sva različne dokaze, ki naj bi obstajali že pred Pitagoro, in ponovili, kaj so to pitagorejske trojice.

Ko se nama je zdelo, da sva teoretično dovolj podkovani, sva pričeli z dokazovanjem veljavnosti Pitagorovega izreka za ploščine enakostraničnih trikotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika. Za pravilne petkotnike sva postopek želeli ponoviti, vendar nisva znali izračunati višine enakokrakega trikotnika, ki jo potrebujemo, da lahko izračunamo ploščino poljubnega pravilnega večkotnika. Zato sva se odločili, da si bova pravokotni trikotnik s stranicami 3, 4 in 5 enot narisali v matematični aplikaciji Geogebra in potrebno višino izmerili. Izmerjene podatke sva nato vstavili v znane formule. Postopek sva ponovili še za pravilne šestkotnike.

1.2. Hipoteze

Glede na cilje raziskovalne naloge sva predpostavili hipoteze, da Pitagorov izrek velja tudi za ploščine pravilnih večkotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika.

H1: Trdiva, da je kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika mogoče zamenjati z enakostraničnimi trikotniki.

H2: Trdiva, da je kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika mogoče zamenjati s pravilnimi petkotniki.

H3: Trdiva, da je kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika mogoče zamenjati s pravilnimi šestkotniki.

1.3. Raziskovalne metode

V okviru raziskovalne naloge sva uporabili različne oblike in metode dela. Raziskovati sva začeli s pravokotnim trikotnim, s stranicami 3 cm, 4 cm in 5 cm. Nato sva nadaljevali s pitagorejskimi trojicami. Vse skupaj sva podkrepili s pomočjo različnih primerov in merjenjem ploščin likov s pomočjo Geogebre.

Metode, ki sva jih uporabili za dokaz oziroma zavrnitev hipoteze, pa so metoda dela z literaturo, dokazovanje, merjenje potrebnih podatkov, zapis poteka in grafično prikazovanje.

2. TEORETIČNI UVOD

2.1. Pitagora

Pitagora je bil starogrški filozof, matematik in mistik. Rodil se je okoli 570 pr. n. št. na otoku Samos v Grčiji, umrl pa je okoli 495 pr. n. št. v Metapontu v Italiji. Poznamo ga po njem imenovanem Pitagorovem izreku in pitagorejskih trojicah. O njegovem zgodnjem življenju ni znano prav veliko. Zgodovinarji menijo, da naj bi se rodil na otoku Samos in da je bil njegov oče najverjetneje trgovec. Že v mlajših letih je bil razgledan in je rad potoval, posvečal pa se je matematiki, astronomiji in poeziji. Po Talesovem nasvetu je odpotoval v Egipt, kjer se je učil matematike in filozofije. Podrobno se je posvetil geometriji. Med Perzijsko okupacijo Egipta so za jetnika vzeli tudi Pitagoro in ga odpeljali v Babilon. Ob vrnitvi na prostost se je vrnil na otok Samos, od tam pa je odšel na Kreto, kjer je študiral pravo. Po končanem študiju se je vrnil na Samos in osnoval šolo, imenovano Polkrog. Okoli leta 518 pr. n. št. pa se je preselil v Cortone, grško kolonijo v Italiji, kjer je ustanovil šolo oziroma bratovščino, znotraj katere je imel ožji krog izbrancev, imenovano Mathematikoi. Bratovščina je bila zelo skrivnostna, zato se še danes ne ve natančno, kaj so v bratovščini študirali. Iz tega obdobja tudi ni zapisov oziroma knjig, saj znanstveniki menijo, da člani bratovščine niso želeli ničesar zapisati, da se ne bi razvedelo. Vse informacije so se prenašale iz ust do ust in so bile strogo varovana skrivnost znotraj bratovščine. Prebivalci Cortoneja so menili, da gre za verski kult, zato bratovščini niso bili naklonjeni in so med političnimi vstajami večino članov pomorili. Ni povsem jasno, ali je Pitagora kolonijo zapustil pred začetkom nasilja, ga je preživel ali pa je bil tudi on umorjen. Obstaja zanimiva anekdota, ki pravi, da je Pitagorove učence odkritje iracionalnih števil tako razburilo, ker so matematiko videli kot popolno vedo, da so Hipasa, ki je odkril iracionalna števila, vrgli kar v morje.

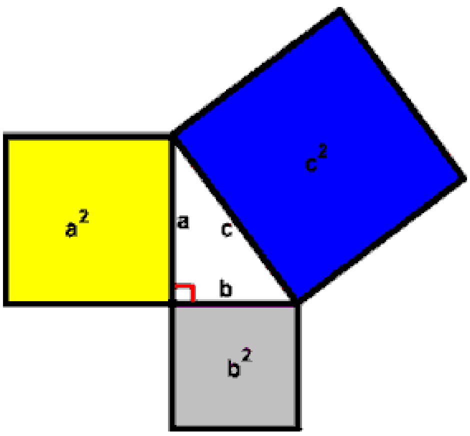
(povz. po http://www.matematiki.si/pitagora/)

2.2. Pitagorov izrek

Pitagorov izrek je izrek v ravninski geometriji, ki je imenovan po Pitagori. Izrek nam pove, da je vsota ploščin kvadratov nad katetama pravokotnega trikotnika enaka ploščini kvadrata nad hipotenuzo.

Pitagorov izrek velja za vsak pravokotni trikotnik. Najdaljšo stranico v pravokotnem trikotniku, ki leži nasproti pravega kota, imenujemo hipotenuza (h), preostali stranici pa sta kateti (k_1, k_2). Tako lahko Pitagorov izrek zapišemo tudi s formulo $h^2 = {k_1}^2 + {k_2}^2$. Hipotenuzo običajno označimo kar s črko c, kateti pa z a in b.

(Zornik, 1975)



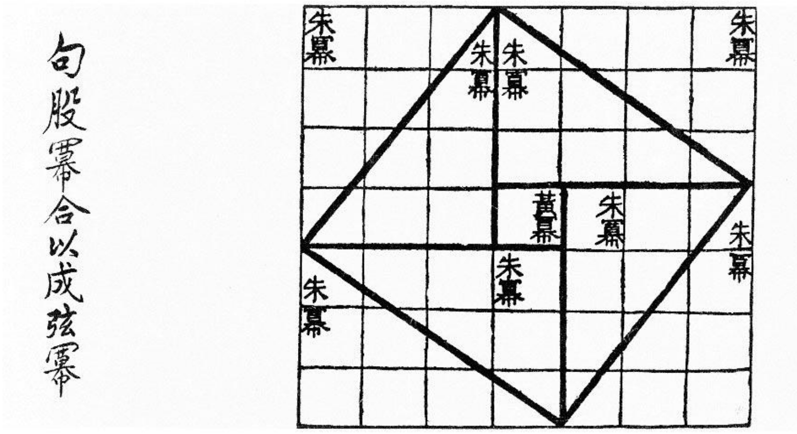
Slika 1: Grafični prikaz Pitagorovega izreka

2.2.1. Zgodovina Pitagorovega izreka

Pitagorov izrek so davno pred Pitagoro poznala že mnoga ljudstva, recimo Babilonci, Kitajci, Grki in Indijci. Tako so že skoraj pred štirimi tisočletji v Mezopotamiji poznali splošno obliko Pitagorovega izreka. Zagotovo so poznali poseben primer tega izreka, da je trikotnik s stranicami dolžine 3, 4 in 5 pravokoten. Zaradi tega in nekaterih drugih dejstev nekateri matematični zgodovinarji celo menijo, da je morda Pitagorovo »odkritje« izreka pravzaprav informacija, ki prihaja iz Kitajske, in do katere je prišel na potovanjih po Egiptu in Babiloniji in morda celo po Indiji. *(Berk, 2012)*

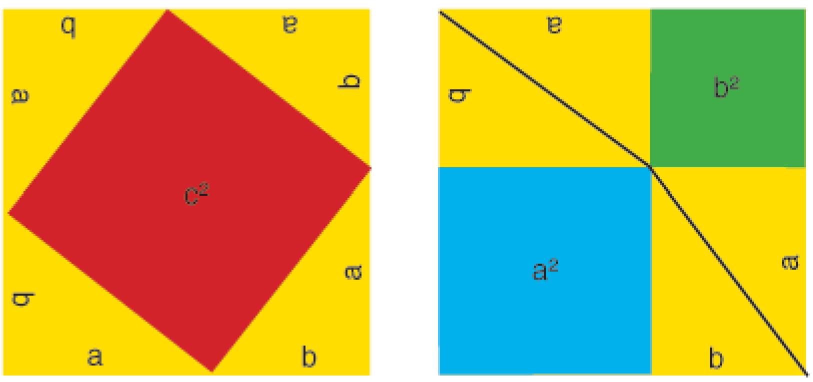
2.2.2. Dokaz Pitagorovega izreka

O Pitagorovem izreku obstaja veliko dokazov. Ker se domneva, da je Pitagora izvedel zanj iz Kitajske, poglejmo najprej dokaz Pitagorovega izreka iz kitajskega matematičnega dela Čou Pei Suan Čing iz leta 206 pr. n. št.



Slika 2: Dokaz Pitagorovega izreka iz kitajskega matematičnega dela

Poglejmo še geometrijski dokaz Pitagorovega izreka.



Slika 3: Geometrijski dokaz Pitagorovega izreka

Na Sliki 3 vidimo, da sta dva enako velika kvadrata razdeljena na manjše like. Prvi kvadrat je razdeljen na pet likov, to so štirje trikotniki rumene barve in manjši kvadrat rdeče barve. Drugi kvadrat pa je razdeljen na šest manjših likov, to so 4 rumeni trikotniki in dva različna manjša kvadrata modre in zelene barve. Opazimo, da so vsi trikotniki rumene barve med sabo enako veliki. To pa pomeni, da si morata biti preostanka ploščinsko enaka. Torej je rdeči kvadrat enako velik kot moder in zelen skupaj. Ker je ploščina rdečega kvadrata enaka c^2, ploščina modrega kvadrata a^2 in zelenega kvadratka b^2, velja enakost $c^2 = a^2 + b^2$. To pa je ravno Pitagorov izrek. *(povz. po http://www.e-um.si/)*

2.2.3. Pitagorejske trojice

Pitagorejska trojica so v matematiki tri pozitivna cela števila (a, b, c), za katera velja Pitagorov izrek

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Za pitagorejski trikotnik velja, da vsaka pitagorejska trojica določa pravokotni trikotnik, pri čemer so števila v pitagorejski trojici dolžine stranic pravokotnega trikotnika. Velja pa tudi obratno, torej da vsak pravokotni trikotnik s celoštevilskimi dolžinami stranic da pitagorejsko trojico. Dolžine stranic pitagorejskega trikotnika so števila pitagorejske trojice. *(Berk, 2012)*

Nekaj primerov pitagorejskih trojic:

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
3	4	5
5	12	13
6	8	10
7	24	25
8	15	17
9	12	15
9	40	41

Število pitagorejskih trojic je neskončno. Za njihovo raziskovanje spremenimo izvirno enačbo v enačbo oblike:

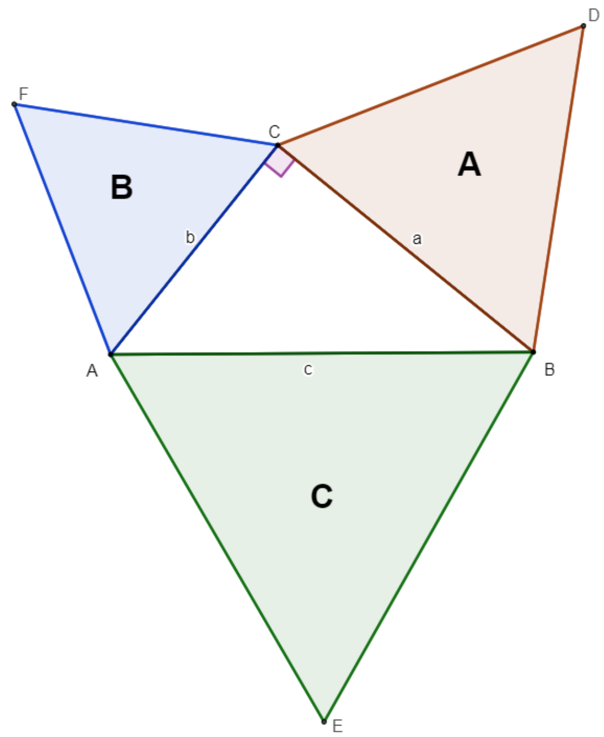
$$a^2 = (c - b)(c + b).$$

3. REZULTATI IN UGOTOVITVE

Raziskovati sva začeli postopno z dokazovanjem, kjer se je to dalo. Kjer z dokazovanjem nisva znali dokazati enakosti, sva si narisali slike v matematični aplikaciji Geogebra in potrebne podatke izmerili ter nato dokazali enakost s pomočjo vstavljanja podatkov v formulo. Pomagali sva si tudi z vstavljanjem vrednosti pitagorejskih trojic po vrsti. Vse skupaj sva še podkrepili z grafičnim prikazovanjem likov in merjenjem ploščin, za kar sva uporabljali matematično aplikacijo Geogebra.

3.1. Enakostranični trikotnik

Najprej sva začeli raziskovati, če Pitagorov izrek velja tudi za ploščine enakostraničnih trikotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika.



Slika 4: Enakostranični trikotnik

Ploščina enakostraničnega trikotnika se namreč izračuna po formuli $p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, pri čemer je a stranica enakostraničnega trikotnika. S p_A bova označevali ploščino enakostraničnega trikotnika nad kateto a, s p_B ploščino enakostraničnega trikotnika nad kateto b in s p_C ploščino enakostraničnega trikotnika nad hipotenuzo c.

$$p_A + p_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2)}{4}$$

Vsota ploščin enakostraničnega trikotnika nad kateto a in kateto b je torej enaka $\frac{\sqrt{3}(a^2+b^2)}{4}$.

Poglejmo še, kolikšna je ploščina enakostraničnega trikotnika nad hipotenuzo c.

$$p_C = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

Pitagorov izrek pravi, da je ploščina kvadrata nad hipotenuzo enaka vsoti ploščin kvadratov nad katetama. Če zgornja rezultata enačimo, dobimo naslednjo enakost.

$$\frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2)}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$

Enačbo krajšamo s $\sqrt{3}$ in odpravimo ulomka, ter dobimo Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$.

S pomočjo dokaza sklepamo, da Pitagorov izrek velja tudi za ploščine enakostraničnih trikotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika.

Preverimo še s pomočjo pitagorejskih trojic.

Prva pitagorejska trojka velja za števila 3, 4 in 5. Te vrednosti nam predstavljajo dolžine stranic enakostraničnih trikotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika. Vrednosti vstavimo v formulo in preverimo če enakosti veljajo.

Podatki so naslednji:

$a = 3\text{ cm},\ \text{b} = 4\text{ cm},\ \text{c} = 5\text{ cm}.$

$p_A = \frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}, \quad p_B = \frac{b^2\cdot\sqrt{3}}{4}, \quad p_C = \frac{c^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

$p_A = \frac{3^2\cdot\sqrt{3}}{4}, \quad p_B = \frac{4^2\cdot\sqrt{3}}{4}, \quad p_C = \frac{5^2\cdot\sqrt{3}}{4}$

$p_A = \frac{9\cdot\sqrt{3}}{4}, \quad p_B = \frac{16\cdot\sqrt{3}}{4}, \quad p_C = \frac{25\cdot\sqrt{3}}{4}$

Dokazati moramo, da velja:

$p_A + p_B = p_C$

Vstavimo podatke v zgornjo enačbo:

$$\frac{9 \ \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{16 \ \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{25 \ \cdot \sqrt{3}}{4}$$

V zgornji enačbi odpravimo ulomke, tako da množimo s skupnim imenovalcem, ki je število 4, in enačbo krajšamo s $\sqrt{3}$. Dobimo naslednjo enakost:

$$9 + 16 = 25.$$

Vidimo, da enakost velja za prvo pitagorejsko trojico. Zato preverimo še za naslednjo.

Naslednja pitagorejska trojka, ki jo bova preverili je 5, 12, 13. Ker je najdaljša stranica vedno hipotenuza, sta torej kateti dolgi 5 in 12 enot, hipotenuza pa 13 enot. Te vrednosti nam predstavljajo dolžine stranic enakostraničnih trikotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika. Vrednosti vstavimo v formulo in preverimo, če enakosti veljajo.

Podatki so naslednji:

$a = 5 \text{ cm}, \ \text{b} = 12 \text{ cm}, \ \text{c} = 13 \text{ cm}.$

$p_A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $\ p_B = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $\ p_C = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$p_A = \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $\ p_B = \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $\ p_C = \frac{13^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$p_A = \frac{25 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $\ p_B = \frac{144 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $\ p_C = \frac{169 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$p_A + p_B = p_C$

$\frac{25 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{144 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{169 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Enačbo ponovno krajšamo s $\sqrt{3}$ ter odpravimo ulomke in dobimo naslednjo enakost:

$$25 + 144 = 169.$$

Vidimo, da enakost velja tudi za drugo pitagorejsko trojico, torej bo najverjetneje še za vse ostale. Zato bova preverili samo še tretjo.

Podatki so naslednji:

$a = 6$ cm, $\mathrm{b} = 8$ cm, $\mathrm{c} = 10$ cm.

$p_A = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $p_B = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $p_C = \frac{c^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$p_A = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $p_B = \frac{8^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $p_C = \frac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$p_A = \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $p_B = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4}$, $p_C = \frac{100 \cdot \sqrt{3}}{4}$

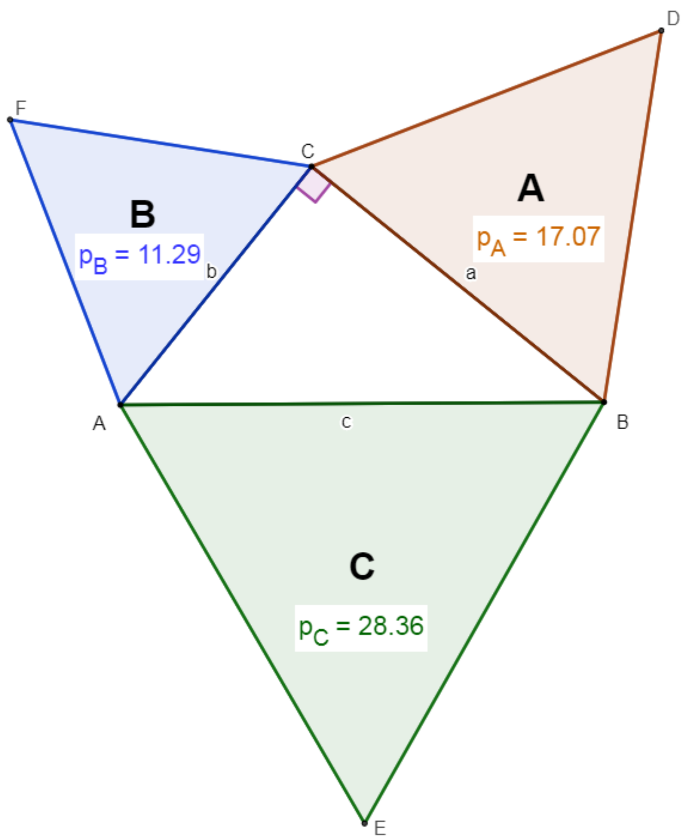
$p_A + p_B = p_C$

$\frac{36 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{100 \cdot \sqrt{3}}{4}$

Enačbo ponovno krajšamo s $\sqrt{3}$ ter odpravimo ulomke in dobimo naslednjo enakost:

$$36 + 64 = 100.$$

Ugotovili sva, da enakosti držijo, vendar bova trditev vseeno podkrepili še grafično s pomočjo Geogebre.



Slika 5: Ploščine enakostraničnih trikotnikov

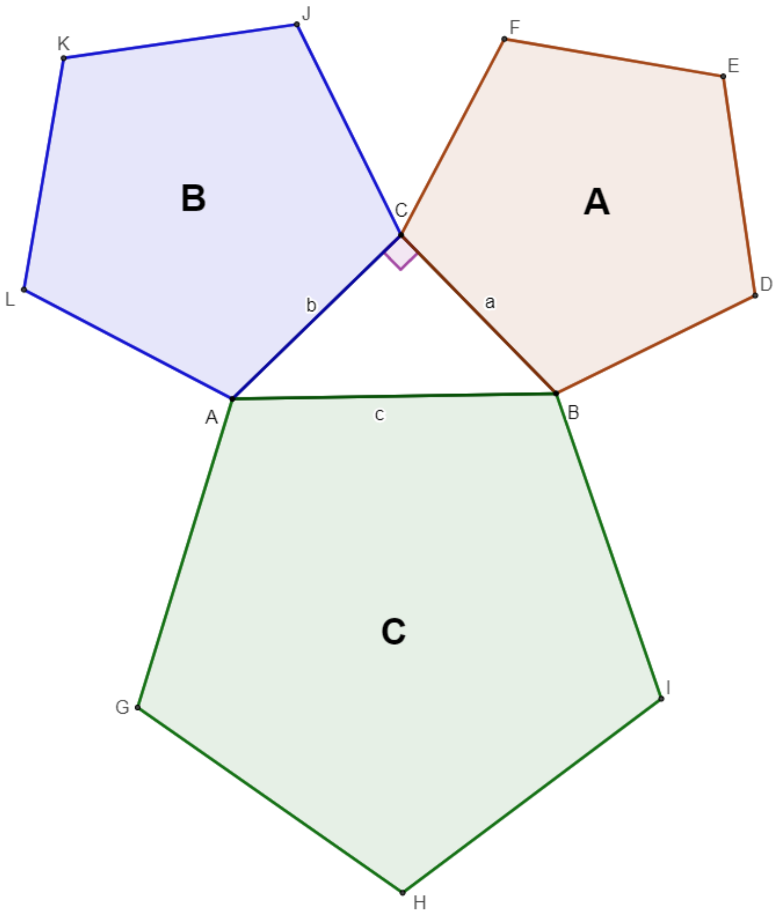
Narisali sva poljuben pravokotni trikotnik. Nad stranicami sva narisali enakostranične trikotnike in določile njihovo ploščino.

Ploščini enakostraničnih trikotnikov nad katetama merita $17{,}07\ \mathrm{e}^2$ in $11{,}29\ \mathrm{e}^2$. Njuna vsota je $28{,}36\ \mathrm{e}^2$. Ploščina enakostraničnega trikotnika nad hipotenuzo pa meri $28{,}36\ \mathrm{e}^2$. Opazili sva, da je vsota ploščin enakostraničnih trikotnikov nad katetama enaka ploščini enakostraničnega trikotnika nad hipotenuzo.

Trdiva lahko, da Pitagorov izrek velja tudi za ploščine enakostraničnih trikotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika.

3.2. Pravilni petkotnik

Dokazali sva že, da Pitagorov izrek velja za ploščine enakostraničnih trikotnikov. Sedaj pa naju zanima, če velja tudi za ploščine pravilnih petkotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika.



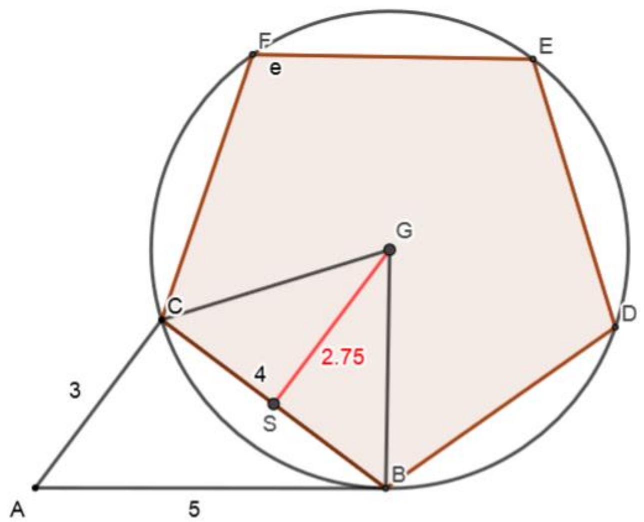
Slika 6: Pravilni petkotnik

Pravilni petkotnik je sestavljen iz petih skladnih enakokrakih trikotnikov, pri čemer je stranica enakokrakega trikotnika enaka polmeru očrtane krožnice. Torej se ploščina pravilnega petkotnika izračuna po naslednji formuli:

$$p = 5 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}.$$

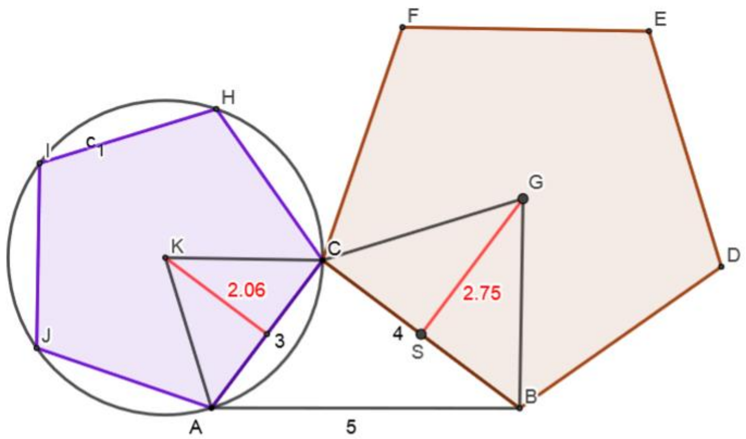
Če želimo izračunati ploščino pravilnega petkotnika, potrebujemo višino enakokrakega trikotnika, ki sestavlja pravilni petkotnik. Razmišljali sva, kako bi izračunali višino enakokrakega trikotnika, če imava edini znan podatek dolžino stranice pravilnega petkotnika. Z znanjem iz osmega razreda znava izračunati velikost notranjega kota, velikost središčnega kota in obseg pravilnega petkotnika. Ne znava pa izračunati višine enakokrakega trikotnika. Zato sva si pomagali z matematično aplikacijo Geogebra ter višino enakokrakega trikotnika kar izmerili, da bi dobili želene rezultate.

Prvi trikotnik, ki sva ga narisali, je trikotnik s stranicami 3, 4 in 5 enot. Nad kateto a, ki meri 4 enote, sva narisali pravilni petkotnik s stranico 4 enote in mu očrtali krožnico. Dobili sva kraka enakokrakega trikotnika. Višina trikotnika je pravokotna razdalja med nosilko stranice in nasprotnim ogliščem. Ker govorimo o enakokrakem trikotniku, pa velja, da višina osnovnico razpolavlja in je nanjo pravokotna. Zato sva poiskali središče osnovnice, narisali pravokotnico in jo izmerili.



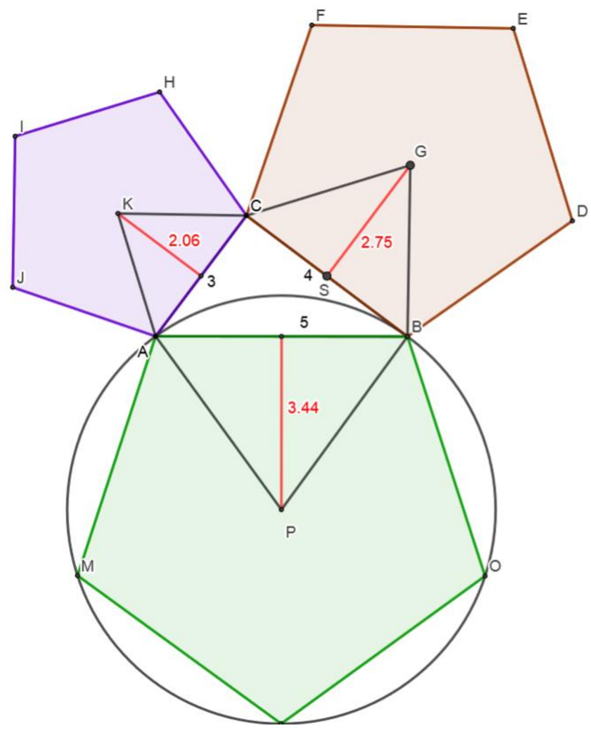
Slika 7: Merjenje višine pravilnega petkotnika nad stranico a

Postopek sva ponovili še za preostali dve stranici pravokotnega trikotnika. Tako sva narisali pravilni petkotnik nad stranico b, ki meri 3 enote, mu očrtali krožnico, določili središče krožnice in razpolovišče osnovnice enakokrakega trikotnika ter izmerili višino enakokrakega trikotnika v pravilnem petkotniku nad stranico b.



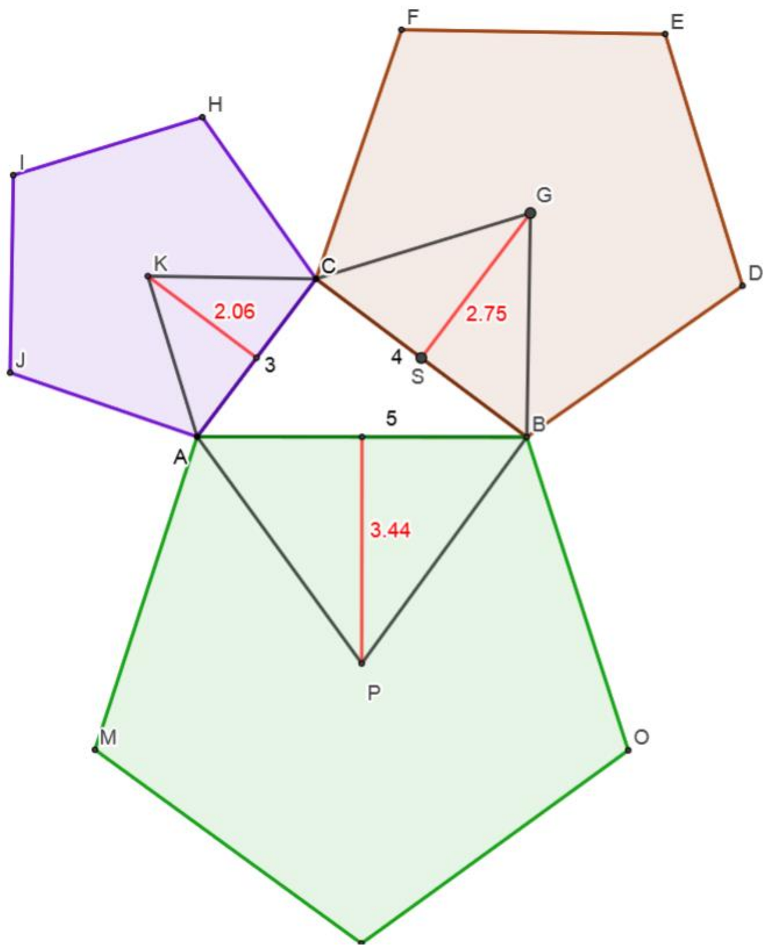
Slika 8: Merjenje višine pravilnega petkotnika nad stranico b

Na koncu pa sva enako naredili še za pravilen petkotnik nad hipotenuzo c, ki meri 5 enot, mu očrtali krožnico in narisali višino na osnovnico enakokrakega trikotnika ter jo izmerili. Tako sva s pomočjo Geogebre izmerili vse podatke, ki jih potrebujeva.



Slika 9: Merjenje višine enakokrakega trikotnika nad stranico c

Ploščino pravilnega petkotnika nad kateto a bova označili s p_A, njegova višina pa meri $2{,}75\ \mathrm{e}$. Ploščino pravilnega petkotnika nad stranico b bova označili s p_B, pripadajoča višina pa meri $2{,}06\ \mathrm{e}$. Ploščino pravilnega petkotnika nad hipotenuzo c pa bova označili z oznako p_C, njegova višina pa meri $3{,}44\ \mathrm{e}$.



Slika 10: Izmerjene višine pravilnih petkotnikov

Poskusili bova dokazati, da velja enakost

$$p_A + p_B = p_C.$$

Najprej bova izračunali ploščino pravilnega petkotnika A.

$$p_A = 5 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$$

V formulo vstaviva podatke $p_A = 5 \cdot \frac{4 \cdot 2{,}75}{2}$ in izračunava.

Ploščina $p_A = 5 \cdot 5{,}5 = 27{,}5\ \mathrm{e}^2$.

V formulo vstaviva še podatke za pravilen petkotnik s stranico b, ki meri 3 enote. $p_B = 5 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}06}{2}$ in izračunava.

Ploščina $p_B = 5 \cdot 3{,}09 = 15{,}45\ \mathrm{e}^2$.

Na koncu pa še izračunava ploščino pravilnega petkotnika s stranico c, ki meri 5 enot. $p_C = 5 \cdot \frac{5 \cdot 3{,}44}{2}$ ter izračunava.

Ploščina $p_C = 5 \cdot 8{,}6 = 43\ \mathrm{e}^2$.

Sedaj imava ploščine pravilnih petkotnikov izračunane in lahko preveriva, če je vsota ploščin pravilnih petkotnikov nad katetama enaka ploščini pravilnega petkotnika nad hipotenuzo.

$$p_A + p_B = 27{,}5 + 15{,}45 = 42{,}95\ \mathrm{e}^2$$

$$p_C = 43\ \mathrm{e}^2$$

Opaziva, da je razlika med ploščinama $0{,}05\ \mathrm{e}^2$. Meniva, da je do manjšega odstopanja prišlo zaradi zaokroževanja na dve decimalni mesti pri merjenju višin, zato bova preverili še na naslednjem primeru.

V aplikaciji Geogebra sva narisali poljuben pravokotni trikotnik, ki ga vidimo na Sliki 11. Nad stranicami tega pravokotnega trikotnika pa pravilne petkotnike. V sami aplikaciji sva izračunali ploščine pravilnih petkotnikov in dobili naslednje rezultate.

Ploščina pravilnega petkotnika nad kateto a meri $p_A = 30{,}54\ \mathrm{e}^2$, ploščina pravilnega petkotnika nad kateto b pa meri $p_B = 34{,}37\ \mathrm{e}^2$.

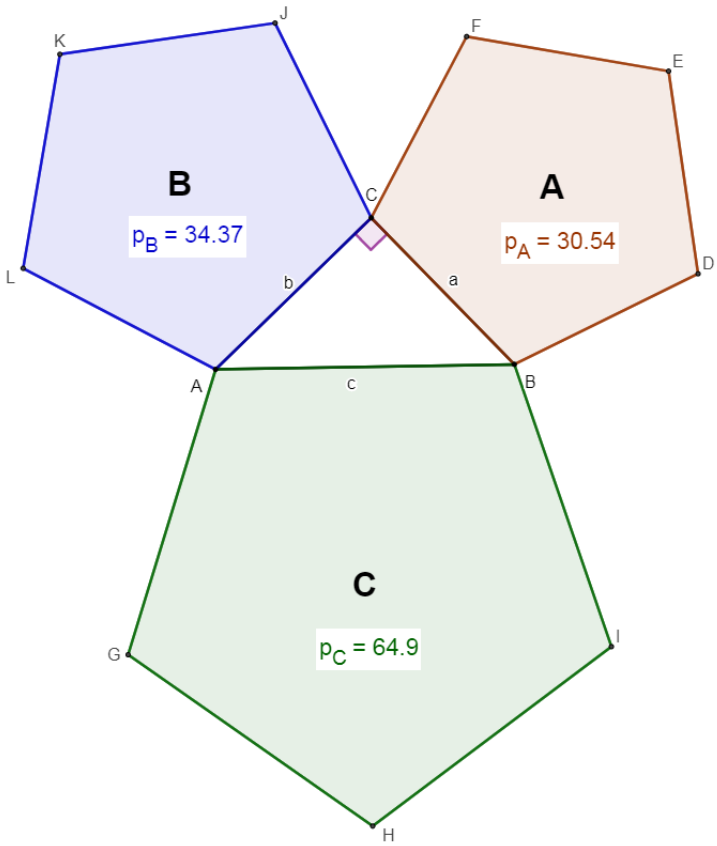
Preveriva, kolikšna je vsota

$$p_A + p_B = 30{,}54 + 34{,}37 = 64{,}91\ \mathrm{e}^2.$$

Ploščina pravilnega petkotnika nad hipotenuzo c pa meri $p_C = 64{,}9\ \mathrm{e}^2$.

Vsoti ploščin pravilnih petkotnikov nad katetama se od ploščine pravilnega petkotnika nad hipotenuzo razlikujeta za eno stotinko. Trdiva, da do majhnega odstopanja pride zaradi zaokroževanja na dve decimalni mesti.

Torej lahko potrdiva, da Pitagorov izrek velja tudi za ploščine pravilnih petkotnikov nad stranicami poljubnega pravokotnega trikotnika.



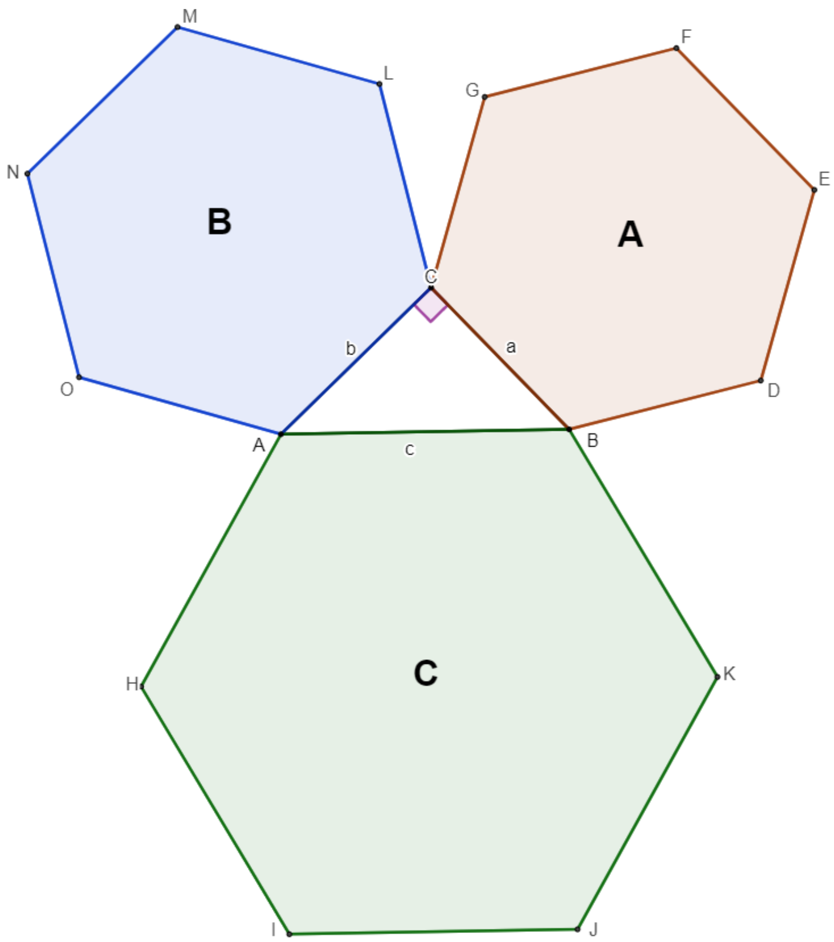
Slika 11: Izmerjene ploščine pravilnih petkotnikov

3.3. Pravilni šestkotnik

Dokazali sva že, da Pitagorov izrek velja za ploščine enakostraničnih trikotnikov in pravilnih petkotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika. Poskusili bova dokazati, da Pitagorov izrek velja tudi za ploščine pravilnih šestkotnikov nad stranicami pravokotnega trikotnika.

Pravilni šestkotnik je sestavljen iz šestih skladnih enakokrakih trikotnikov, pri čemer je stranica enakokrakega trikotnika enaka polmeru očrtane krožnice. Torej se ploščina pravilnega šestkotnika izračuna po naslednji formuli:

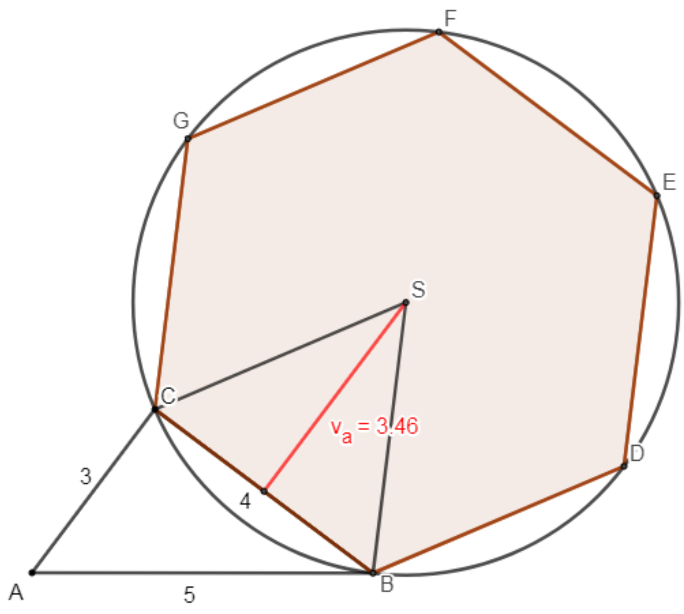
$$p = 6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}.$$



Slika 12: Pravilni šestkotnik

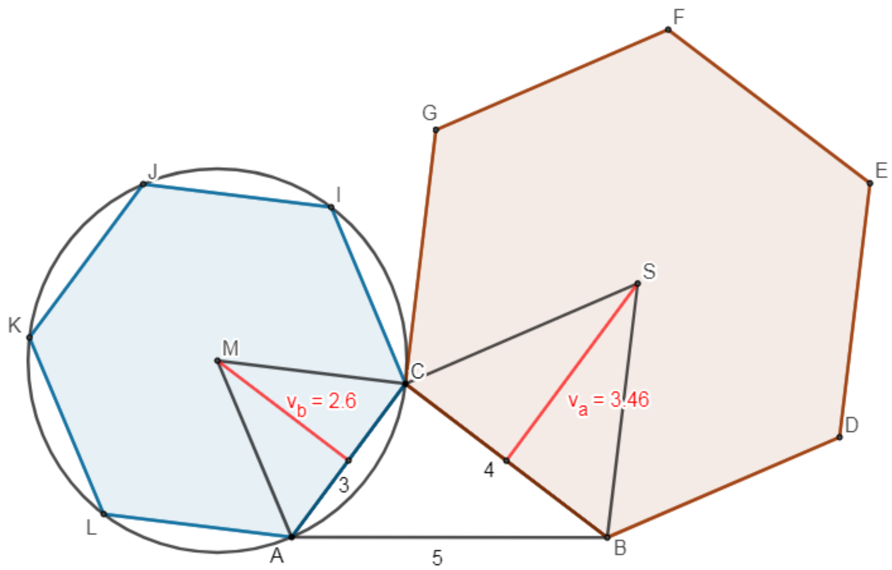
Če želimo izračunati ploščino pravilnega šestkotnika, potrebujemo višino enakokrakega trikotnika, ki sestavlja pravilni šestkotnik. Razmišljali sva podobno kot pri pravilnem petkotniku in višino enakokrakega trikotnika izmerili na enak način kot pri pravilnem petkotniku. Višine enakokrakega trikotnika tudi v tem primeru ne znava izračunati, saj imava edini znan podatek dolžino stranice pravilnega šestkotnika. Zopet sva si pomagali z matematično aplikacijo Geogebra ter višino enakokrakega trikotnika kar izmerili, da bi dobili želene rezultate.

Prvi trikotnik, ki sva ga narisali, je trikotnik s stranicami 3, 4 in 5 enot. Nad kateto a, ki meri 4 enote, sva narisali pravilni šestkotnik s stranico 4 enote in mu očrtali krožnico. Dobili sva kraka enakokrakega trikotnika. Za višino enakokrakega trikotnika velja, da osnovnico razpolavlja in je nanjo pravokotna. Zato sva poiskali središče osnovnice, narisali pravokotnico in jo izmerili.



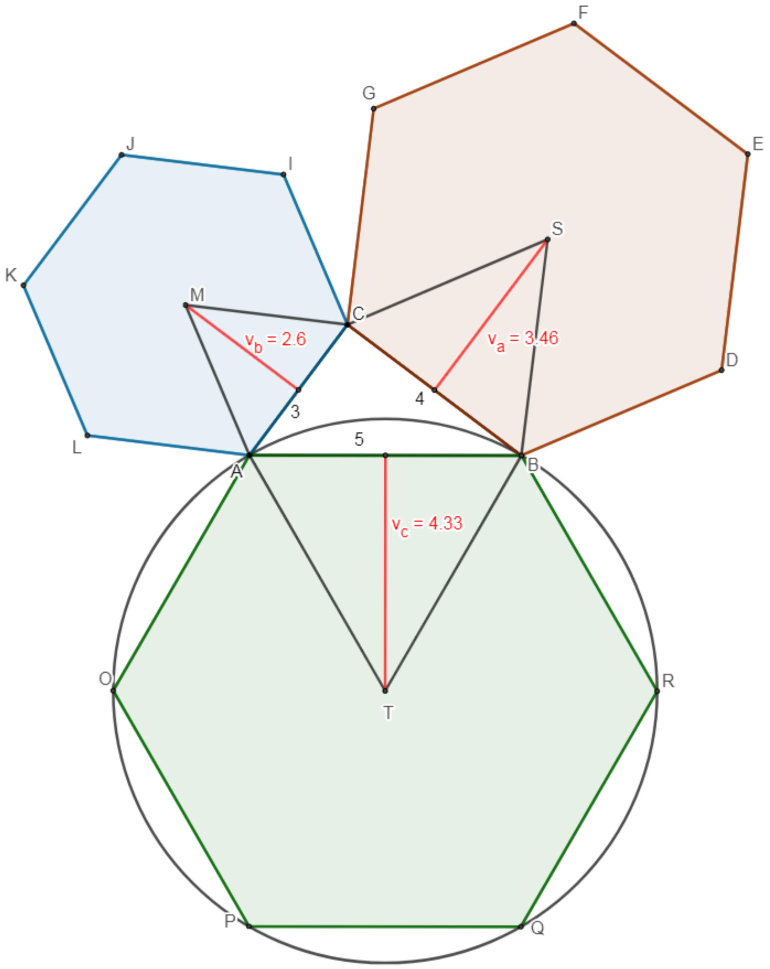
Slika 13: Merjenje višine pravilnega šestkotnika nad stranico a

Postopek sva ponovili še za preostali dve stranici pravokotnega trikotnika. Tako sva narisali pravilni šestkotnik nad stranico b, ki meri 3 enote, in določili še višino enakokrakega trikotnika v pravilnem šestkotniku nad stranico b.



Slika 14: Merjenje višine pravilnega šestkotnika nad stranico b

Na koncu pa sva enako naredili še za pravilni šestkotnik nad hipotenuzo c, ki meri 5 enot. S pomočjo Geogebre sva izmerili vse podatke, ki jih potrebujeva.



Slika 15: Merjenje višine pravilnega šestkotnika nad stranico c

Ploščino pravilnega petkotnika nad kateto a bova označili s p_A, njegova višina pa meri $3{,}46$ e. Ploščino pravilnega petkotnika nad stranico b bova označili s p_B, pripadajoča višina pa meri $2{,}6$ e. Ploščino pravilnega petkotnika nad hipotenuzo c pa bova označili z oznako p_C, njegova višina pa meri $4{,}33$ e.

Poskusili bova dokazati, da velja enakost

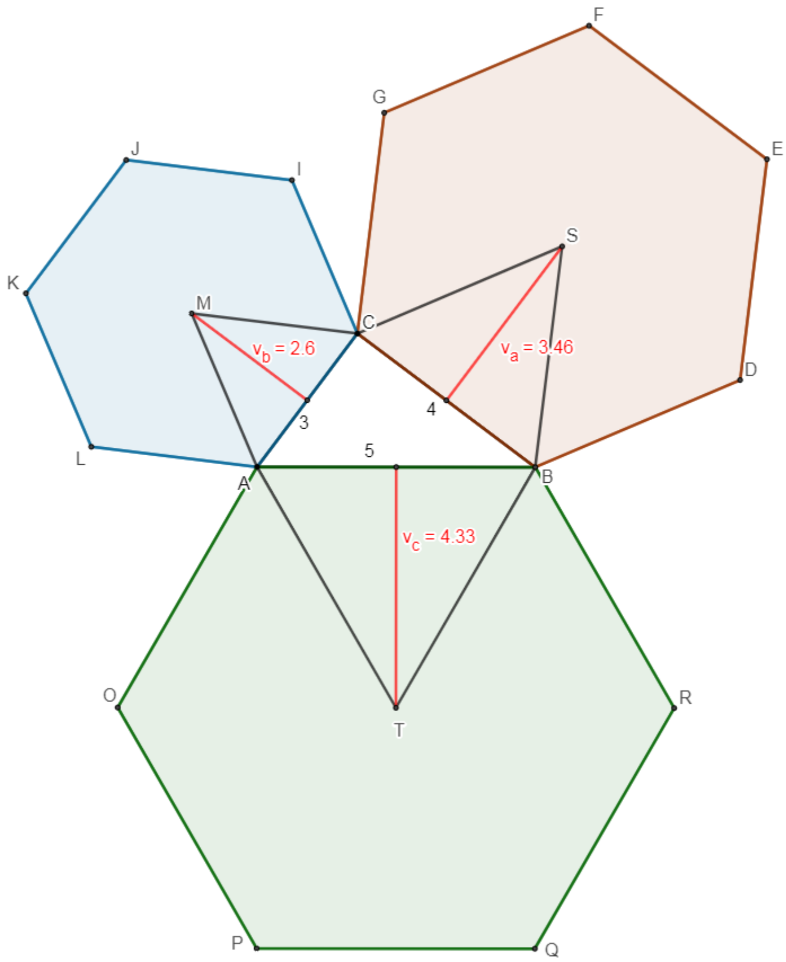
$$p_A + p_B = p_C.$$

Najprej bova izračunali ploščino pravilnega šestkotnika A.

$$p_A = 6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$$

V formulo vstaviva podatke $p_A = 6 \cdot \frac{4 \cdot 3{,}46}{2}$ in izračunava.

Ploščina $p_A = 6 \cdot 6{,}92 = 41{,}52\ \mathrm{e}^2$.



Slika 16: Izmerjene višine pravilnih šestkotnikov

V formulo vstaviva še podatke za pravilen šestkotnik s stranico b, ki meri 3 enote. $p_B = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}6}{2}$ in izračunava.

Ploščina $p_B = 6 \cdot 3{,}9 = 23{,}4\ \mathrm{e}^2$.

Na koncu pa še izračunava ploščino pravilnega šestkotnika s stranico c, ki meri 5 enot. $p_C = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4{,}33}{2}$ in izračunava.

Ploščina $p_C = 6 \cdot 10{,}825 = 64{,}95\ \mathrm{e}^2$.

Sedaj imava ploščine pravilnih šestkotnikov izračunane, tako da lahko preveriva, če je vsota ploščin pravilnih šestkotnikov nad katetama enaka ploščini pravilnega šestkotnika nad hipotenuzo.

$$p_A + p_B = 41{,}52 + 23{,}4 = 64{,}92\ \mathrm{e}^2$$

$$p_C = 64{,}95\ \mathrm{e}^2$$

Opaziva, da je razlika med ploščinama $0{,}03\ \mathrm{e}^2$. Odstopanje je minimalno, do katerega je prišlo zopet zaradi zaokroževanja višine enakokrakega trikotnika na dve decimalni mesti. Vseeno bova rezultat preverili še na poljubnem primeru.

V aplikaciji Geogebra sva narisali poljuben pravokotni trikotnik. Nad stranicami tega pravokotnega trikotnika pa pravilne šestkotnike. V samem programu sva izračunali ploščine pravilnih šestkotnikov in dobili naslednje rezultate.

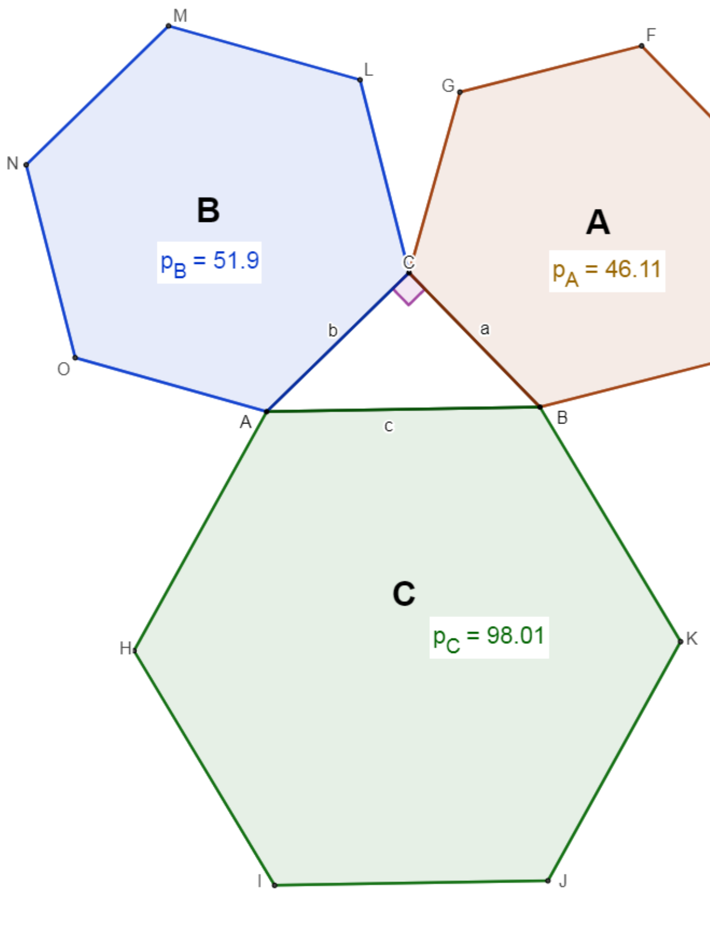
Ploščina pravilnega šestkotnika nad kateto a meri $p_A = 46{,}11\ \mathrm{e}^2$, ploščina pravilnega petkotnika nad kateto b pa meri $p_B = 51{,}9\ \mathrm{e}^2$.

Preveriva, kolikšna je vsota

$$p_A + p_B = 46{,}11 + 51{,}9 = 98{,}01\ \mathrm{e}^2.$$

Ploščina pravilnega šestkotnika nad hipotenuzo c pa meri $p_C = 98{,}01\ \mathrm{e}^2$.

Dobili sva enakost, torej lahko trdiva, da Pitagorov izrek velja tudi za ploščine pravilnih šestkotnikov nad stranicami poljubnega pravokotnega trikotnika.



Slika 17: Izmerjene ploščine pravilnih šestkotnikov

3.4. Ugotovitve

Glede na zgornje rezultate sva preverili veljavnost hipotez.

H1: Trdiva, da je kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika mogoče zamenjati z enakostraničnimi trikotniki.

To hipotezo sva potrdili, saj sva enakost dokazali na tri načine. Dokazali sva, da velja

$$p_A + p_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2)}{4} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = p_C.$$

Enakost sva dokazali tudi z vstavljanjem vrednosti pitagorejskih trojic v formulo, vse skupaj pa sva podkrepili še grafično s pomočjo Geogebre.

H2: Trdiva, da je kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika mogoče zamenjati s pravilnimi petkotniki.

Drugo hipotezo sva prav tako potrdili. Opazili sva sicer, da je zaradi merjenja potrebnih podatkov, ki sva jih potrebovali, da sva izračunali ploščine, prišlo do manjšega odstopanja. Meniva, da je do manjšega odstopanja prišlo zaradi zaokroževanja na dve decimalni mesti pri merjenju višin.

H3: Trdiva, da je kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika mogoče zamenjati s pravilnimi šestkotniki.

Prav tako lahko potrdiva še tretjo hipotezo, saj sva z merjenjem in vstavljanjem podatkov v formulo dobili enakost leve in desne strani enačbe. Pri merjenju višin sva zopet naleteli na odstopanje na mestu stotink, do česar je prišlo zaradi zaokroževanja na dve decimalni mesti, tako da hipotezo lahko potrdiva.

4. ZAKLJUČEK

Osnovni namen najine raziskovalne naloge je bil, da preveriva, če lahko kvadrate nad stranicami pravokotnega trikotnika zamenjava s poljubnimi pravilnimi večkotniki. Dokazali sva, da kvadrate lahko zamenjamo z enakostraničnim trikotnikom, pravilnim petkotnikom in pravilnim šestkotnikom. Predvidevava pa, da Pitagorov izrek velja še za preostale pravilne večkotnike. S to raziskovalno nalogo pa sva tudi razširili najino znanje matematike, posebej Pitagorovega izreka, kar sva si želeli že iz 8. razreda.

V prvem delu sva ponovili Pitagorov izrek in poiskali zanimivosti o Pitagori, zgodovini Pitagorovega izreka, dokaz izreka ter informacije o pitagorejskih trojicah. V drugem delu sva pričeli z raziskovanjem in potrjevanjem hipotez, ki sva si jih postavili. Kar sva znali, sva dokazali in še dokaz podkrepili s konkretnimi primeri ter grafičnim prikazom. Ker pa nisva znali izračunati vseh neznanih dolžin, sva jih s pomočjo matematične aplikacije Geogebra izmerili in podatke vstavili v formule ter enačili.

Hipoteze sva uspešno potrdile, kljub temu da sva naleteli na manjša odstopanja na mestu stotink, do česar je prišlo zaradi zaokroževanja na dve decimalni mesti. Naše raziskovanje pa bi lahko razširili še na druge pravilne večkotnike in preverile enakosti ploščin. Vsekakor bi bilo zanimivo še raziskovati v tej smeri, midve pa sva svoje znanje utrdili in pridobili še nova znanja s področja matematike in uporabe aplikacije Geogebra, ki ju bova s pridom izkoristili pri pouku in na prihajajočem nacionalnem preverjanju znanja.

5. VIRI IN LITERATURA

Berk, J., Draksler in Robič, M. (2012). Skrivnosti števil in oblik 8. Učbenik za matematiko v 8. razredu osnovne šole. Ljubljana: Rokus Klett.

Zornik, N. (1975). Pitagorov izrek. Ljubljana: Državna založba Slovenije.

Znani matematiki in njihova dela: http://www.matematiki.si/pitagora/ [21. 11. 2017]

Pitagorov izrek: https://sl.wikipedia.org/wiki/Pitagorov_izrek [21. 11. 2017]

Pitagorov izrek: http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2002/dira/tuk/izrek.html

[21. 11. 2017]

Dokaz Pitagorovega izreka: http://www.e-um.si/ [14. 1. 2018]

6. VIRI SLIK

Slika 1: Grafični prikaz Pitagorovega izreka

http://www.educa.fmf.uni-lj.si/izodel/sola/2002/dira/tuk/izrek.html

Slika 2: Dokaz Pitagorovega izreka iz kitajskega matematičnega dela

https://sl.wikipedia.org/wiki/Pitagorov_izrek

Slika 3: Geometrijski dokaz Pitagorovega izreka

https://sl.wikipedia.org/wiki/Pitagorov_izrek

Slika 4: Enakostranični trikotnik (avtorska slika)

Slika 5: Ploščine enakostraničnih trikotnikov (avtorska slika)

Slika 6: Pravilni petkotnik (avtorska slika)

Slika 7: Merjenje višine pravilnega petkotnika nad stranico a (avtorska slika)

Slika 8: Merjenje višine pravilnega petkotnika nad stranico b (avtorska slika)

Slika 9: Merjenje višine pravilnega petkotnika nad stranico c (avtorska slika)