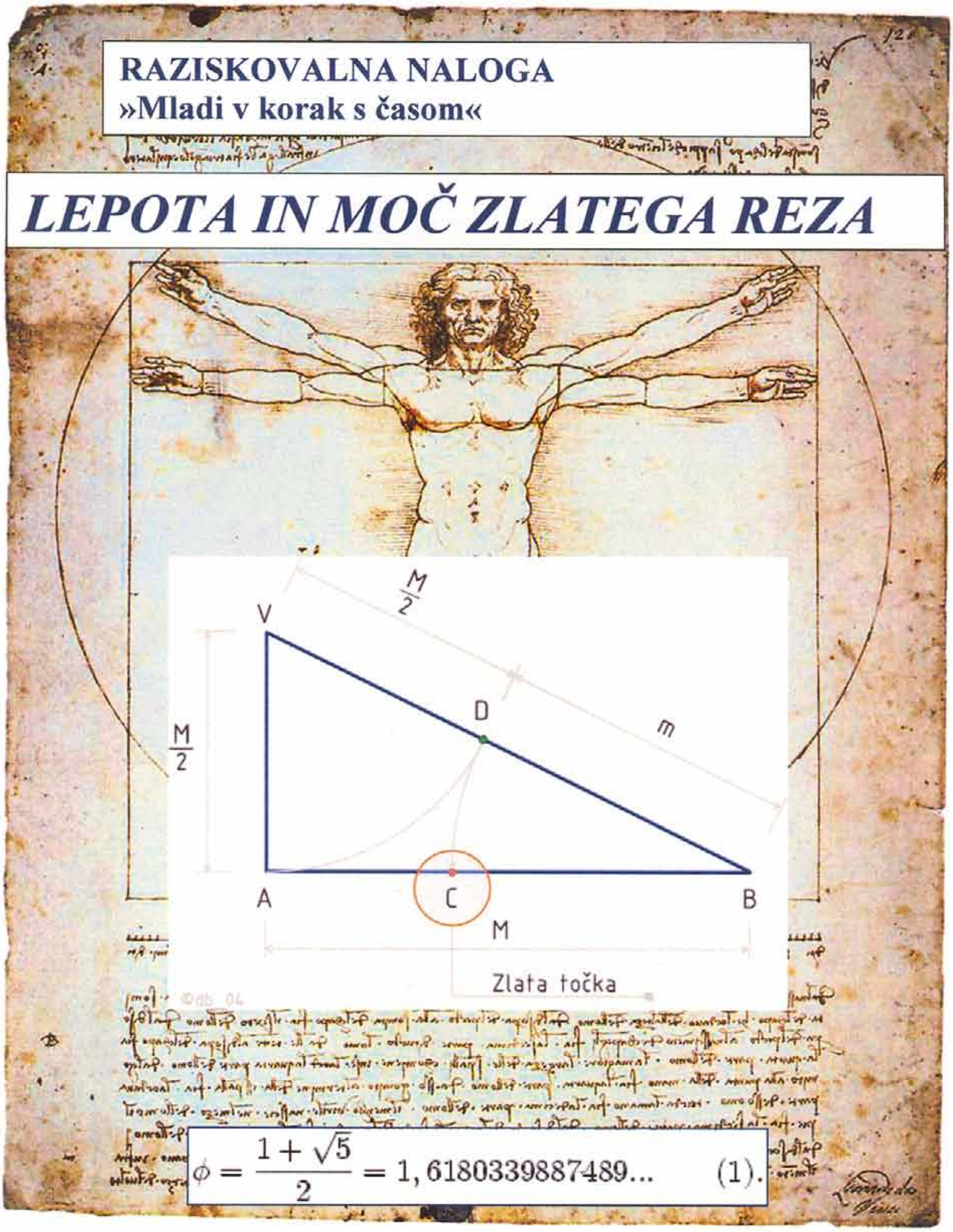
RAZISKOVALNA NALOGA
»Mladi v korak s časom«

LEPOTA IN MOČ ZLATEGA REZA



$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887489... \qquad (1).$$

Mentorica:
BOJANA PEVEC

Avtorja:
MARTIN ČAKŠ
MARUŠA HABOT

Osnovna šola Šmarje pri Jelšah

Šolsko leto: 2005/2006

KAZALO

»Geometrija ima dve veliki bogastvi:

eno je Pitagorov izrek in

drugo je delitev daljice na največje in

srednje razmerje (zlati rez).

Prvega lahko primerjamo z mero za zlato,

drugega pa lahko imenujemo

dragocen dragulj.«

—Johannes Kepler

1. UVOD

"Fi. Zlati rez. Ena cela šeststo osemnajst."

"Fi"? so rekli vsi v en glas.

"Točno". Langdon je zdaj hitro menjaval diapozitive-spiralna zrna borovih storžev, razporeditev listov na vejah, členke nekaterih žuželk. Vse se je osupljivo ravnalo po zlatem rezu.

"To je neverjetno!" je zaklical nekdo od študentov.

"Demon zla car," je zamrmral, "da Ani violino. To je čisto preprosta šifra!"

Sophie ni vedela, o čem govori. Fibonaccijeve številke? Prepričana je bila, da jih je dedek napisal le zato, da bi v preiskavo vpletli kriptološki oddelek. Imajo še kak namen? Iz žepa je potegnila listek in se še enkrat zatopila v dedkovo sporočilo.

13-3-2-21-1-1-8-5

Demon, zla car,
da Ani violino.

Kaj je s številkami?

"Pomešano Fibonaccijevo zaporedje je ključ," je rekel Langdon in ji vzel list iz roke."Številke kažejo, kako razvozlati preostali del sporočila."...

Brez besed je potegnil pero iz suknjiča in premetal črke v obeh vrstah.

"Demon, zla car, da Ani violino
je bil anagram za...

Leonardo da Vinci,

Mona Liza.

To sta odlomka iz romana Da Vincijeva šifra, trenutno ene največjih svetovnih uspešnic, po kateri je posnet istoimenski film. Pri nas je bil premierno predvajan 18.maja letos v ljubljanskem Koloseju.

V omenjeni knjigi razkriva pisec nenavadno povezavo umetniških del velikega znanstvenika Leonarda da Vincija z zlatim rezom in Fibonaccijevim zaporedjem.

Oba pojma sta tesno povezana z umetnostjo, arhitekturo in naravo.

2. NAMEN

♦ Poiskati literaturo o zlatem rezu

♦ Preučiti pomen zlatega reza in Fibonaccijevega zaporedja za razumevanje matematičnih zakonitosti narave

♦ Opraviti meritve, ocene in analize meritev pri razmerjih delov telesa devetošolcev

♦ Opraviti meritve in analize meritev s pomočjo zemljevidov Geodetskega zavoda RS okoliških cerkev, kjer je prisoten zlati rez

♦ Razširiti poznavanje in razumevanje zlatega reza med učenci in odraslimi

3. HIPOTEZE

◆Poznavanje in razumevanje zlatega reza in Fibonaccijevega zaporedja je nasploh manj znano

◆Razmerja med posameznimi deli telesa petnajstletnikov se približujejo idealnim razmerjem zlatega reza

◆V naravi najdemo zelo veliko primerov Fibonaccijevega zaporedja in zlatega reza

◆ Zlati rez je prisoten tudi med razdaljami cerkev v naši bližnji in daljni okolici

4. ZLATI REZ

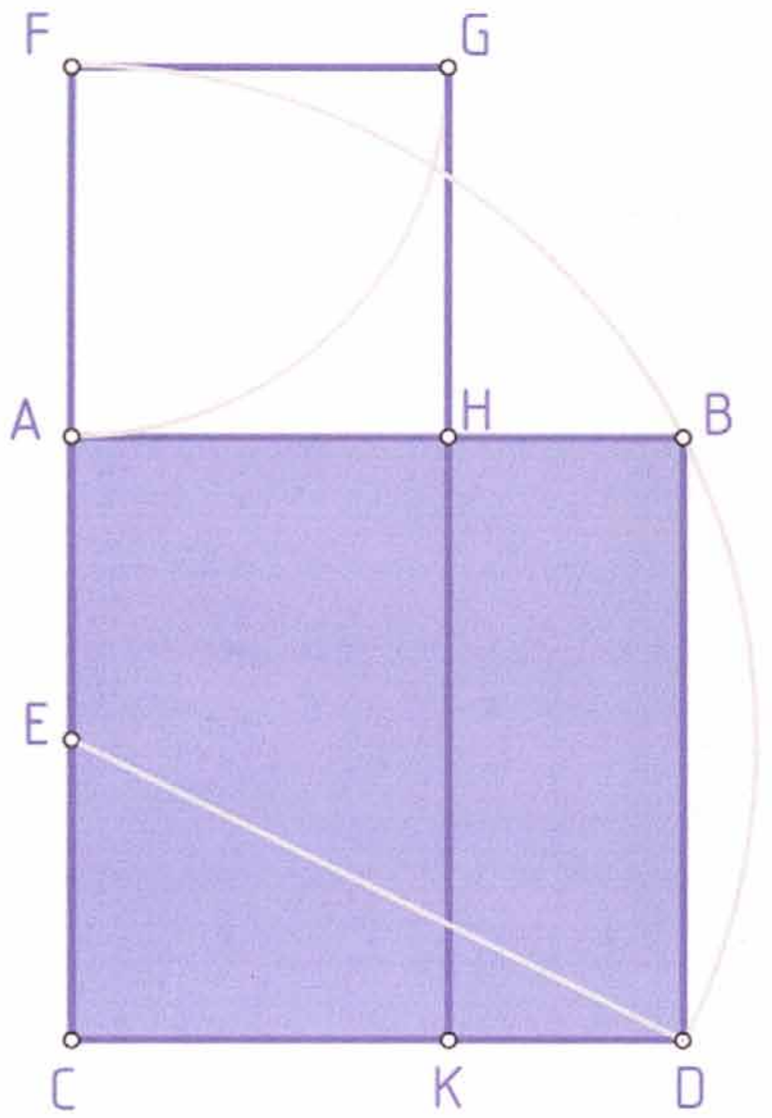
Zlati rez

(latinsko: sectio aurea, tudi sectio divina) **je razmerje, ki ga lahko ponazorimo z razdelitvijo daljice na dva neenaka dela tako, da je razmerje manjšega proti večjemu enako razmerju večjega proti celotni dolžini stranice.** Približen faktor je 1,618033988749894.

4.1.Definicija št.Φ ter zlati pravokotnik

Eden največjih antičnih matematikov in predvsem geometrov **Evklid** je v svojih **Elementih** (V, 11. trditev) postavil problem, ki se glasi: »**Dano daljico razdeli na dva neenaka dela tako, da bo ploščina pravokotnika, očrtanega nad celotno daljico z višino manjšega dela daljice enaka ploščini kvadrata, očrtanega na večjem delu daljice.**«

Evklidova definicija



Slika 1 - Evklidova definicija

Njegova konstrukcijska rešitev privede do delitve dane daljice v razmerju zlatega reza kot odnosa med posameznimi deli daljice, prav tako pa tudi odnosa posameznih delov daljice proti celotni daljici. Evklid je dano daljico razdelil na dva dela in ju poimenoval **major** (večji del - M) in **minor** (manjši del – m) tako, da je veljalo naslednje sorazmerje

$$\frac{m}{M} = \frac{M}{m+M} \qquad (1),$$

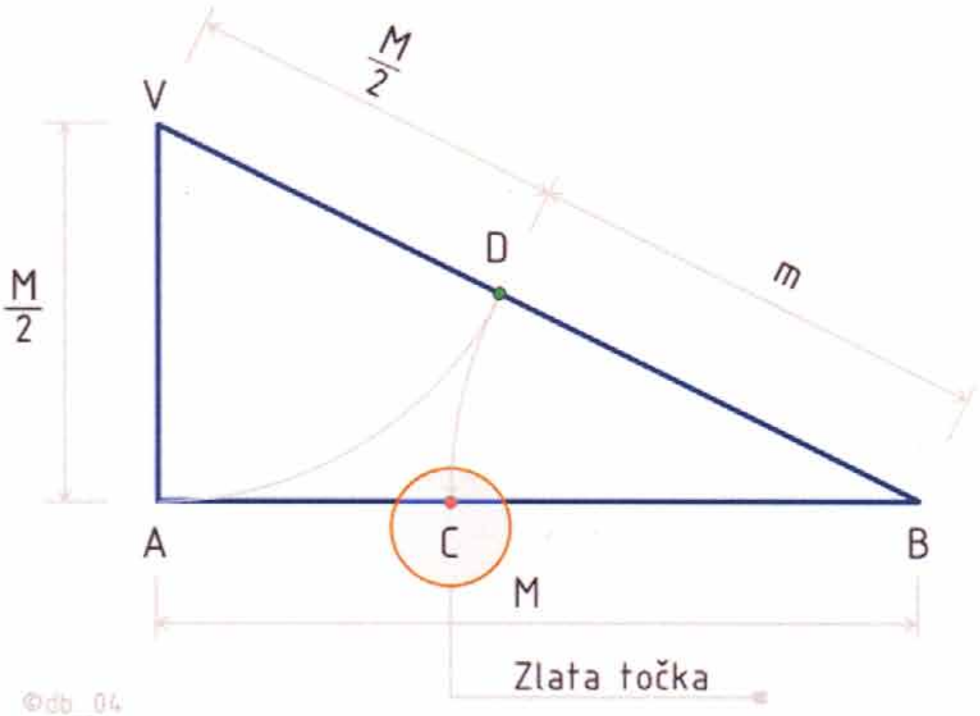
$$\frac{AF}{AC} = \frac{AC}{CF} \quad (2).$$

Iz sorazmerja (1) pridemo po ureditvi do Pitagorovega izreka, ki je osnova za klasično konstrukcijo zlatega reza na daljici:

$$M^2 + \left(\frac{M}{2}\right)^2 = \left(m + \frac{M}{2}\right)^2 \quad (3).$$

Po rešitvi (3) se izkaže, da je razmerje M:m vedno enako, in sicer 0,61803398874989... Število imenujemo število zlatega reza.

Klasična konstrukcija zlatega reza na daljici



Točko C imenujemo zlata točka, ki deli daljico AB v zlatem rezu. Konstrukcijsko gledano je zlati rez konstrukcijski postopek delitve daljice na dva neenaka dela, tako da je krajši del proti daljšemu v enakem razmerju kot daljši del proti celotni dolžini daljice.

4.2. Metoda neprekinjene delitve ali širitve

Delitev daljice po metodi zlatega reza drugače imenujemo tudi metoda neprekinjene delitve, ker so vsi omenjeni deli daljice po parih (M - m, m; m, M; M, m+M) v stalnem sorazmerju. Metoda zlatega reza kot delitvenega postopka se pokaže predvsem v zaporedju dolžin delov daljice, in sicer kot:

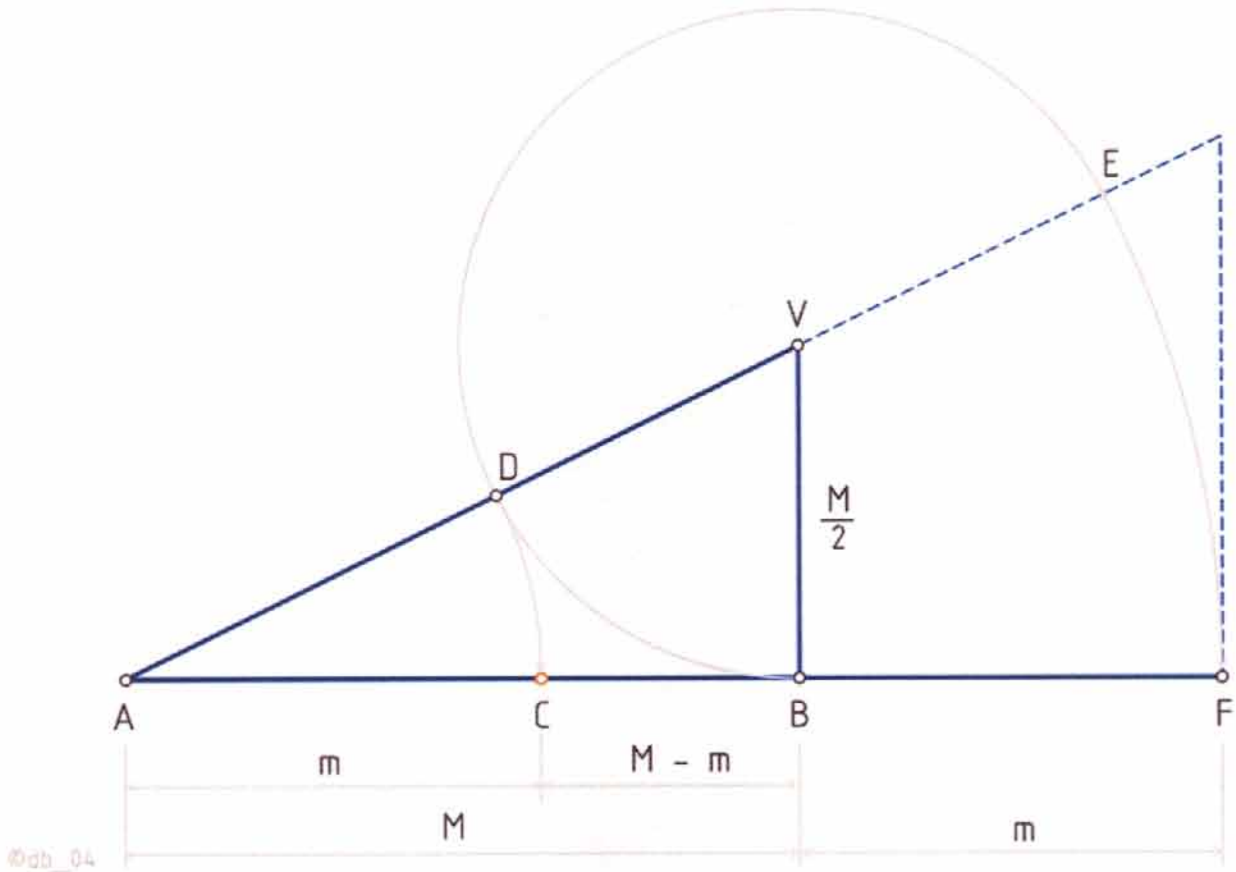
$$\uparrow: m, M, m + M, m + 2M, 2m + 3M, 3m + 5M, \dots \qquad (4),$$

če osnovno daljico širimo oziroma

$$\downarrow: M + m, M, m, M - m, 2m - M, 2M - 3m, 5m - 3M, \dots \qquad (5),$$

če osnovno daljico krčimo.

Poenostavljeni primer širitve ali krčitve daljice prikazuje Slika 3, s katero lahko definiramo zunanji in notranji zlati rez.



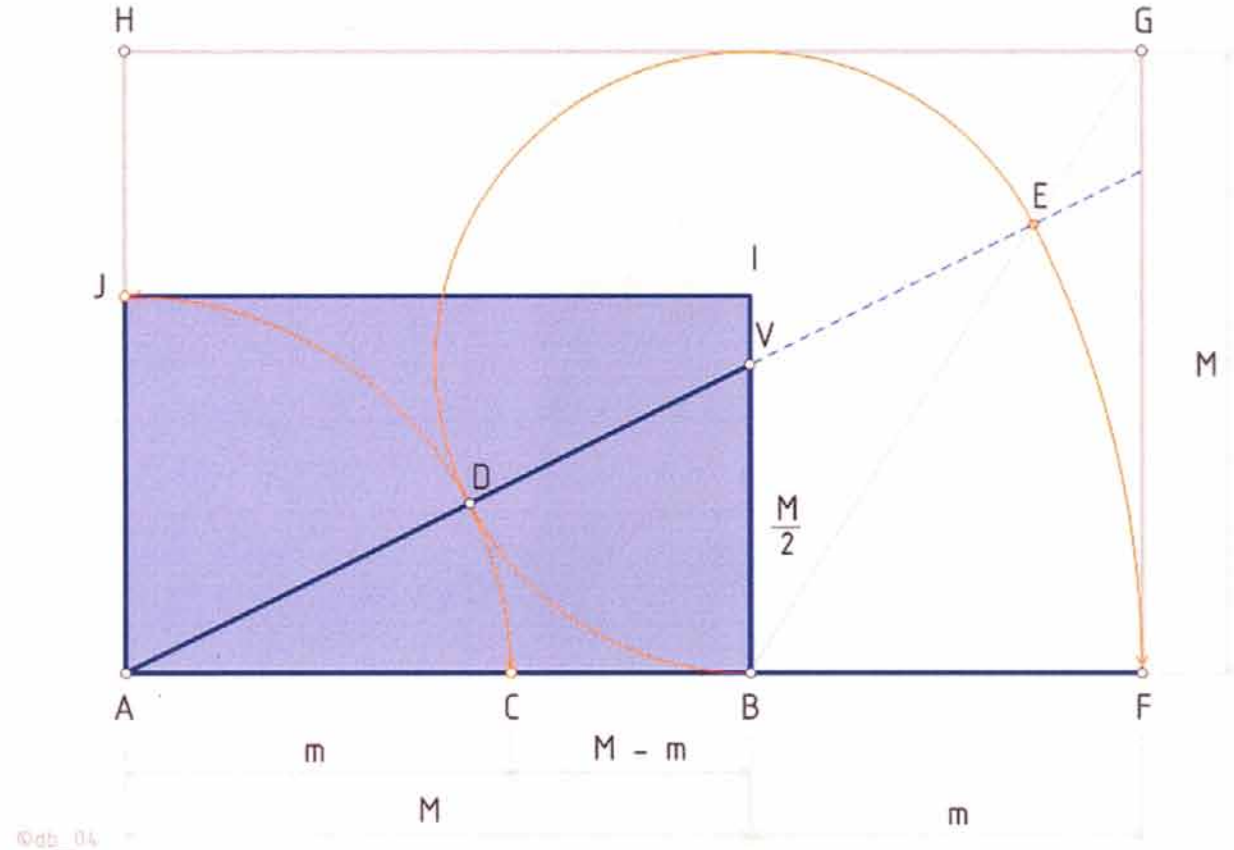
O notranjem zlatem rezu govorimo, ko moramo daljico razdeliti v zlatem rezu (na minor in na major). Zunanji zlati rez pa je dopolnitev oziroma razširitev daljice, ki naj ustreza majorju do daljice, katere dopolnjeni odsek tvori s prejšnjim zlato razmerje.

Zlati pravokotnik je pravokotnik, katerega osnovnica a z višino b tvori zlato razmerje:

$$\frac{a}{b} = \phi.$$

Slika 1 - Konstrukciji zlatih pravokotnikov

Za konstrukcijo zlatega pravokotnika moramo imeti podano eno izmed stranic; na Sliki 1 je to osnovnica a = AB, ki predstavlja daljšo stranico, major M. Na stranico AB očrtamo zlati pravokotnik ABIJ po klasični konstrukciji zlatega reza na stranici AB. V primeru, da stranica AB predstavlja krajšo stranico pravokotnika, minor m, posežemo po konstrukciji razširitve daljice v zlatem rezu in dobimo zlati pravokotnik AFGH.



4.3.Zlato razmerje

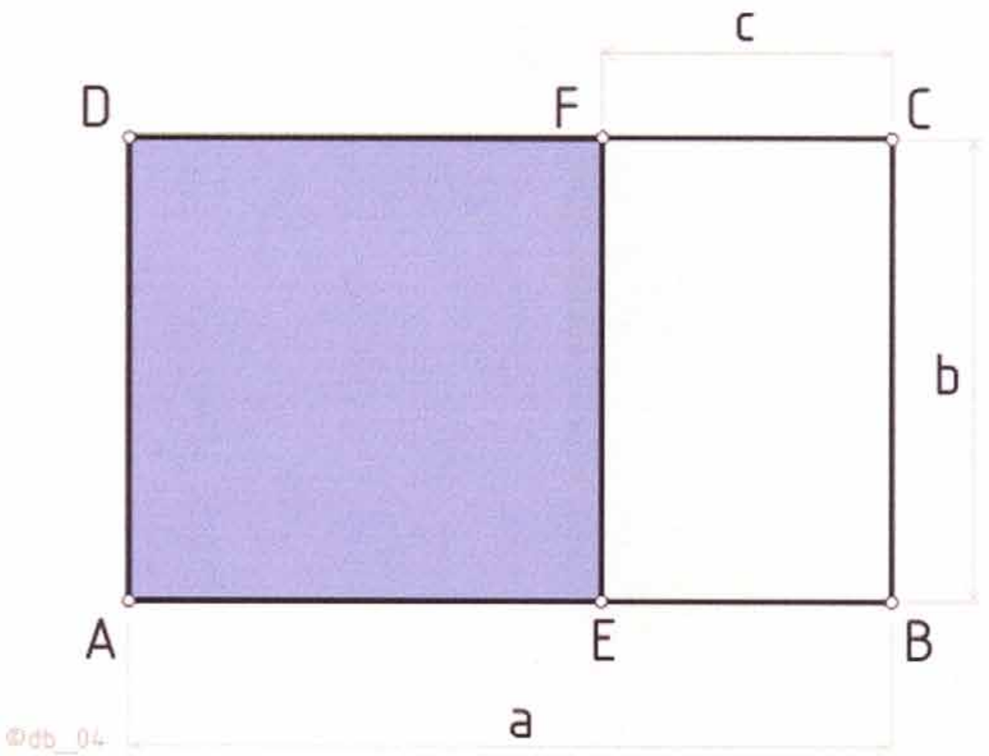
je iracionalno število oblike

$$\boxed{\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887489... \qquad (1).}$$

Definiramo ga lahko tudi kot razmerje stranic pravokotnika, ki mu po izrezu največjega kvadrata ostane pravokotnik z enakim razmerjem stranic. Pravokotniku s stranicami v zlatem razmerju pravimo zlati pravokotnik.

4.4.Zlati pravokotnik

Slika 1 - Zlati pravokotnik



Po Sliki 1 velja sorazmerje

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \phi \qquad (2)$$

ali če izrazimo stranici a in b z majorjem M = a in minorjem m = b

$$\frac{M}{m} = \frac{m}{M - m} = \phi \qquad (3).$$

4.5.Število zlatega reza

Število zlatega reza ali zlato število je matematična konstanta, po navadi označena z veliko grško črko Φ (fi) ali τ (tau), katere vrednost je:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887498948\text{...}$$

To število, imenovano število zlatega reza (ali tudi zlato število, v dobi renesanse pa kar božansko razmerje ali zlato razmerje), **velja za eno najlepših in najzanimivejših števil na svetu. Tesno je povezano tudi s Fibonaccijevim zaporedjem,** saj količnik dveh zaporednih členov tega zaporedja konvergira ravno k Φ. **Kljub na videz skrivnostnemu matematičnemu izvoru pa je resnično osupljiva prav njegova vloga pri enem temeljnih razmerij v naravi, saj se pri rastlinah in živalih kot tudi pri ljudeh pogosto pojavljajo ravno razmerja, ki s strah zbujajočo natančnostjo spominjajo na točno razmerje zlatega reza.**

Število je pozitivni realni koren kvadratne enačbe:

Lastnosti

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

z lastnostima:

$$\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi} \qquad \text{oziroma} \qquad \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

in

$$\Phi^3 = \frac{\Phi + 1}{\Phi - 1}.$$

Za količine rečemo, da so v razmerju zlatega reza, če je celota v enakem razmerju z večjim delom, kot je večji del v enakem razmerju z manjšim oziroma če velja:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}.$$

Količine so, rečeno enakovredno, v razmerju zlatega reza, če je razmerje večjega dela proti manjšemu enako razmerju manjšega dela do njune razlike:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}.$$

Če prvo enačbo pomnožimo z a/b ali drugo enačbo z (a-b)/b), bosta enačbi enakovredni:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1$$

in zato:

Dejstvo, da je daljica razdeljena na dva dela z dolžinama a in b v razmerju zlatega reza je v nekaterih besedilih označeno kot »delitev daljice v največjem in srednjem razmerju«.

$$\frac{a}{b} = \Phi.$$

5. MATEMATIČNE UPORABE ZLATEGA REZA

Ker je Φ po definiciji koren polinomske enačbe, je algebrsko število. Pokazati se da, da je Φ iracionalno število. Ker je 1+1/Φ = Φ, je neskončni verižni ulomek števila Φ eden od najpreprostejših:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = \cdots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}} = [1; 1, 1, 1, 1, ...]$$

Obratna vrednost je:

$$\Phi^{-1} = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}} = [0; 1, 1, 1, \ldots].$$

»Geometrija ima dve veliki bogastvi: eno je Pitagorov izrek in drugo je delitev daljice na največje in srednje razmerje. Prvega lahko primerjamo z mero za zlato, drugega pa lahko imenujemo dragocen dragulj.«

—Johannes Kepler

Kepler je pokazal, da stopnja rasti Fibonaccijevih števil F(n+1)/F(n) konvergira k Φ.

Znanih je 3.141.000.000 decimalk.

Vrednosti iz verižnega ulomka

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi + } \frac{1}{\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Vrednosti iz vgnezdenih korenov

$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

$$\Phi = \sqrt{1+\phi}$$

6. ZLATA SPIRALA

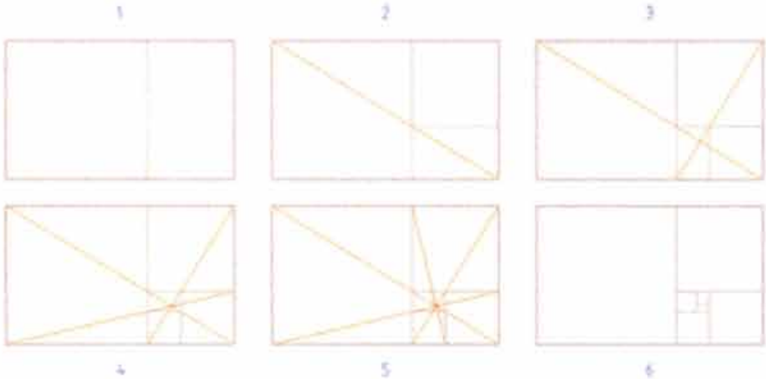
Zlata spirala je ravninska krivulja, ki jo v polarnem koordinatnem sistemu (r, θ) opišemo z enačbo:

$$r = f(\theta) = \phi^{\frac{\theta}{\pi}} \qquad (1)\,,$$

kjer sta Φ število zlatega reza (zlato razmerje) in π Ludolfovo število.

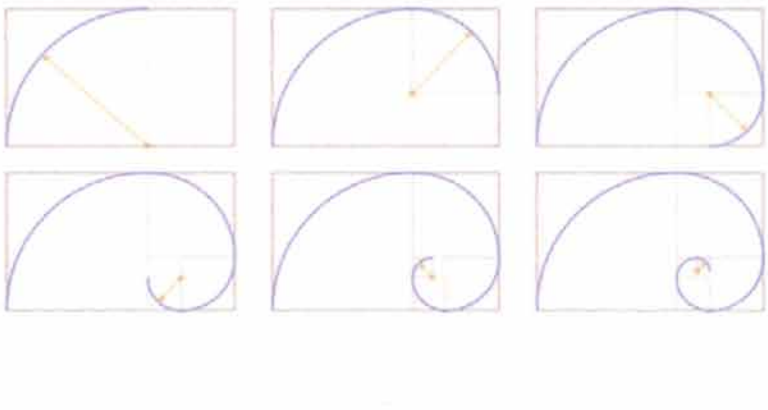
Konstrukcijo zlate spirale približno izvedemo v zlatem pravokotniku s pomočjo četrtinskih lokov včrtanih krožnic v posamezna polja zlatega pravokotnika. Razdelitev zlatega pravokotnika na takšna polja prikazuje Slika 1:

Slika 1: Zlatorezna polja v zlatem pravokotniku



Včrtavanje četrtinskih lokov krožnic znotraj zlatoreznih polj kaže Slika 2:

Slika 2:Včrtavanje četrtinskih lokov krožnic



Polmeri lokov predstavljajo padajoče geometrijsko zaporedje s količnikom, enakim obratni vrednosti zlatega razmerja

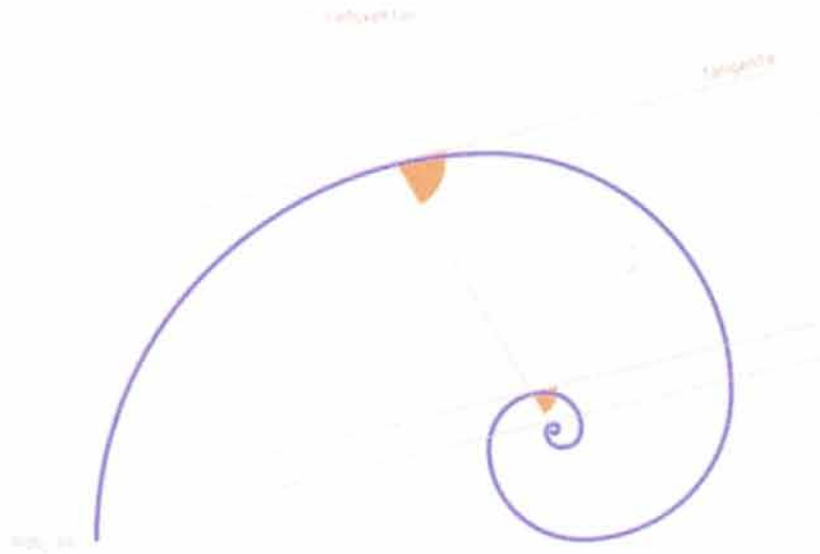
$$\varphi = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (2),$$

oblike

$$r_n = r_1 \varphi^{n-1} \qquad (3).$$

Zlata spirala spada v družino logaritemskih spiral (predlog za ime logaritemska spirala je podal francoski matematik Pierre Varignon (1645-1722)). Pomembna lastnost logaritemskih spiral je, da kot, ki ga tangenta na spiralo v poljubni točki oklepa z radijvektorjem, ostaja konstanten. Tako lahko logaritemske spirale imenujemo tudi enakokotne spirale (Slika 3).

Slika 3: Enakokotna spirala



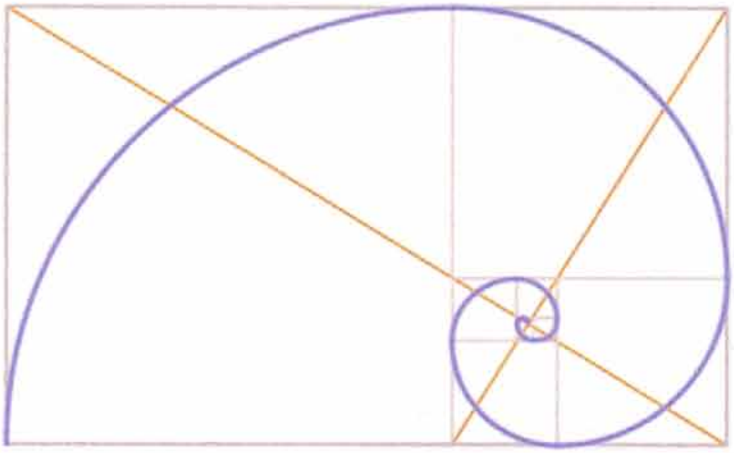
Poleg enačbe 1 je za zlato spiralo izpeljanih še več enačb, med njimi je zelo uporabna Sharpova:

$$r = \left(1 + 2k\sin\left(\frac{4\phi}{3}\right)\right) a e^{k\theta} \qquad (4),$$

kjer je

$$k = \frac{2\ln\phi}{3\pi} \qquad (5).$$

Slika 4: Zlata spirala



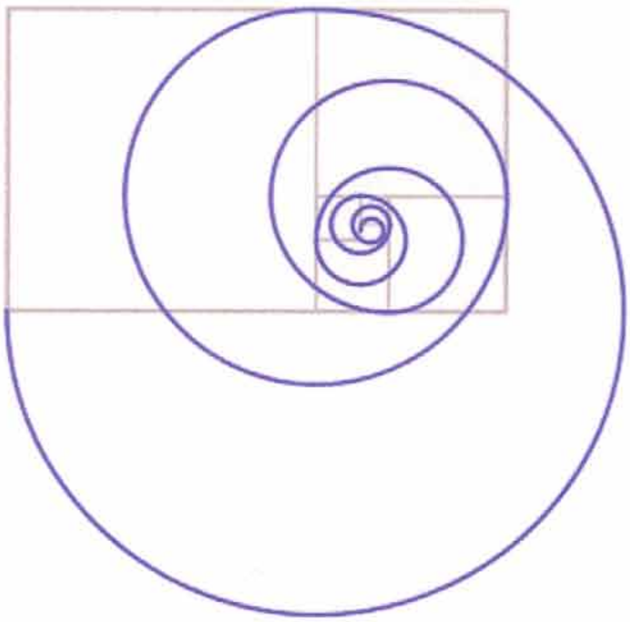
Točka, ki predstavlja začetek zlate spirale (bolje rečeno njeno stekališče), ima koordinati

$$S\left(\frac{1+3\phi}{5}e, \frac{3-\phi}{5}e\right) \qquad (6),$$

kjer je e poljubno izbrana enota za višino zlati spirali očrtanega zlatega pravokotnika.

Poleg omenjene konstrukcije zlate spirale znotraj zlatega pravokotnika poznamo še druge, alternativne konstrukcije zlate spirale, denimo v zlatem trikotniku, zlatem petkotniku in podobno. Obstaja še konstrukcija velike zlate spirale s pomočjo tričetrtinskih krožnih lokov na zlatem pravokotniku. To prikazuje Slika 5.

Slika 5:Velika zlata spirala



7. FIBONACCIJEVO ŠTEVILO

Fibonaccijeva števila, ki določajo Fibonaccijevo zaporedje, so v matematiki določena z naslednjimi enačbami:

$$F_n \equiv F(n) = \begin{cases} 0; & n = 0; \\ 1; & n = 1; \\ F(n-2) + F(n-1); & \end{cases}$$

7.1. Fibonaccijevo zaporedje in razmnoževanje zajcev

Zaporedje začnemo z dvema številoma, običajno 0 in 1. Naslednje Fibonaccijevo število dobimo, če seštejemo predhodni. Prva Fibonaccijeva števila so:

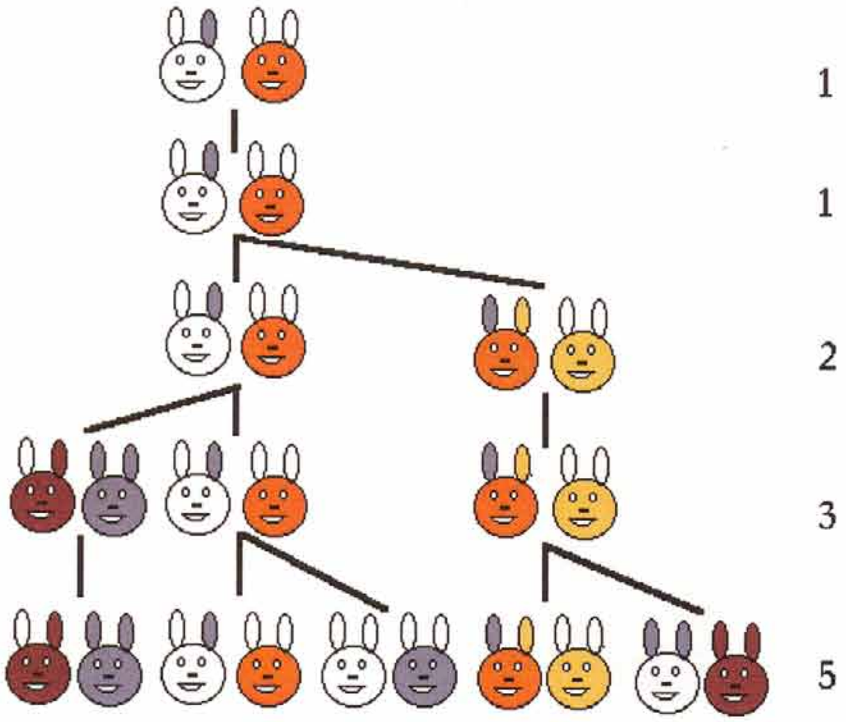
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Srednjeveški matematik Fibonacci, ki je živel v dvanajstem stoletju našega štetja, je znan predvsem po tem, da je v Evropo vpeljal indo-arabski številski zapis, ki je bistveno olajšal računske operacije. Ker je bil novi zapis praktičen, so ga hitro sprejeli v trgovskih krogih, ki so prav takrat ponovno doživljali razcvet. Med problemi s katerimi se je ukvarjal Fibonacci, je bila tudi zanimiva vrsta števil, ki jo danes imenujemo »Fibonaccijevo zaporedje«.

Fibonacci ali Leonardo iz Pise

Nekoč ga je zanimalo, kako hitro bi se lahko v idealnih okoliščinah razmnoževali zajci. Recimo, da imamo en par zajcev (samca in samico), ki bi se jima vsak mesec rodil nov par (eden ženskega in eden moškega spola). Čas, potreben za dosego reproduktivne sposobnosti, je pri zajcih dolg en mesec. Predpostavimo, da naši zajci nikoli ne umrejo, samica pa, kot že rečeno, od drugega meseca naprej rodi vsak mesec nov par.

1. Po prvem mesecu se prvi par že pari, vendar je v kletki še vedno le en par.
2. Na koncu drugega meseca samica povrže nov par zajcev, tako da sta sedaj v kletki 2 para.
3. Ob koncu tretjega meseca prvotna samica da svoj drugi par, druga samica pa še ni spolno zrela. V kletki so 3 pari zajcev.
4. Po štirih mesecih dve samici, prva in druga, povržeta nova para, tako da je sedaj 5 zajcev.



Število parov narašča v naslednjem zaporedju: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55… Števila, ki jih tako dobimo, tvorijo tako imenovano Fibonaccijevo zaporedje, ki ga lahko povzamemo z naslednjo formulo:

$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

Seveda je zgoraj opisani miselni eksperiment dokaj neživljenjski, vendar nam njegova rešitev da zaporedje, ki je presenetljivo povezano z razmerjem zlatega reza, s številom Φ = 1,618034. Če pogledamo razmerje med sosednjimi členi zaporedja (delimo naslednjega s prejšnjim), vidimo, da dobimo naslednja števila:

1/1=1; 2/1=2; 3/2=1,5; 5/3=1,666…; 8/5=1,6; 13/8=1,625; 21/13=1,61538…

Ko napredujemo po zaporedju, opazimo, da razmerje konvergira proti določeni vrednosti, ki ji pravimo zlato razmerje: približno 1,618034… Temu številu pravimo tudi zlati rez, zlato število, ki je predstavljeno z veliko grško črko Φ in je neposredno povezano z malim zlatim rezom, mali φ, ki je le del velikega za decimalno vejico.

Števili A in B sta torej v zlatem rezu, če zanju velja enačba: A / B = B / (A+B).

7.2. Fibonaccijeva števila v naravi

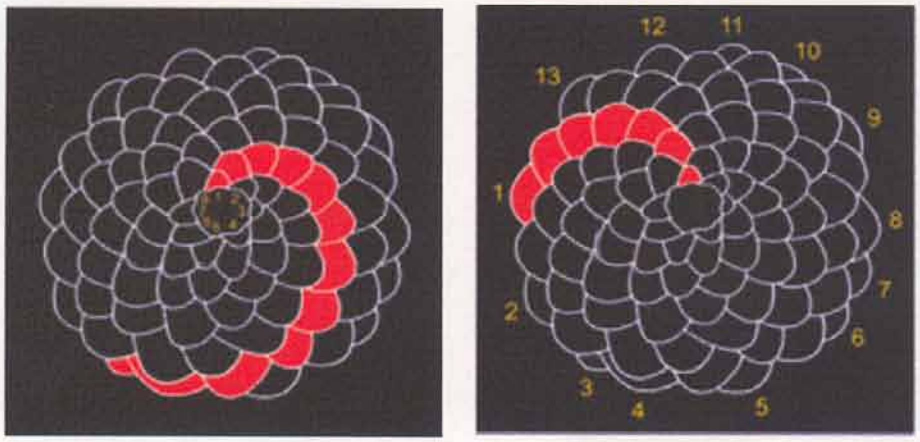
Zanimivo je, da najdemo v naravi Fibonaccijeva števila na mnogih krajih. Pri nekaterih rastlinah se Fibonaccijeva števila pojavljajo, ko ugotavljamo, kako so listi razporejeni okoli stebla. Če pogledamo na rastlino od zgoraj, so listi večinoma razporejeni tako, da prestrežejo največjo možno količino sončnih žarkov, se pravi, da zgornji listi ne prekrivajo spodnjih.

Pri teh rastlinah na Fibonaccijeva števila naletimo:

- ko opazujemo razporeditev cvetnih listov v cvetu,
- v številu krogov, ki jih v smeri urinega kazalca naredimo, ko štejemo, koliko listov je med spodnjim in prvim, ki ga prekriva,
- v razporeditvi semen v cvetu in storžih.

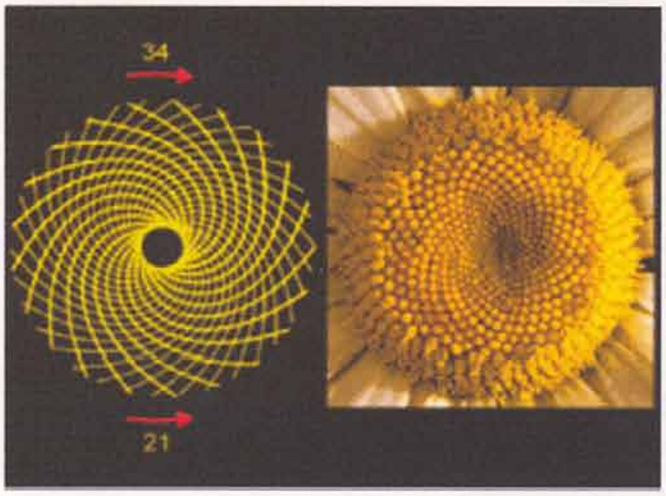
Cvetovi različnih rož

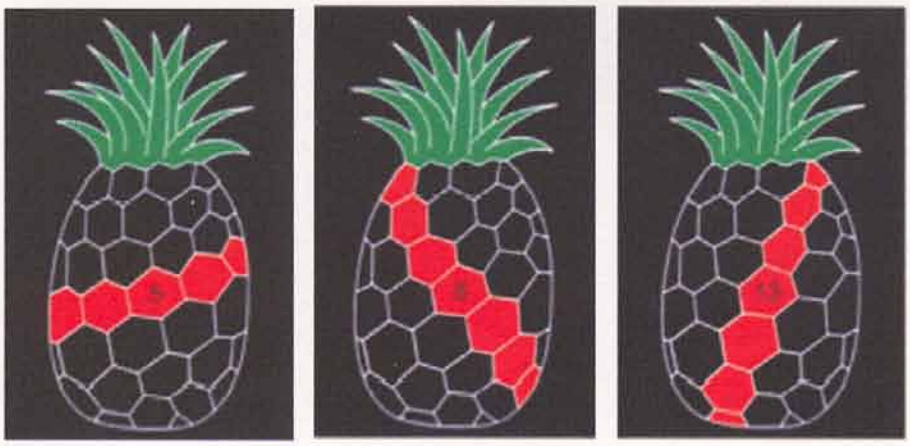
Cvetovi imajo v sredini semena, ki so razvrščena v obliki spirale. Število spiral na zunanjem robu in število spiral pri središču sta sosednji števili Fibonaccijevega zaporedja, kar je prikazano na naslednjih slikah.



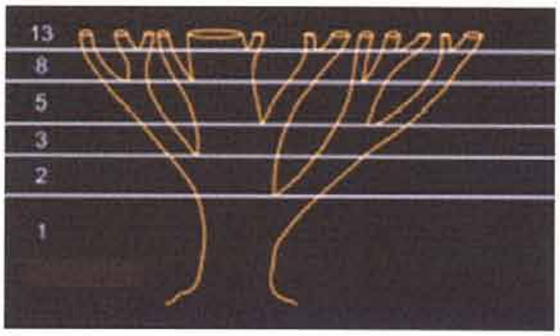
Semena, razvrščena v obliki spirale

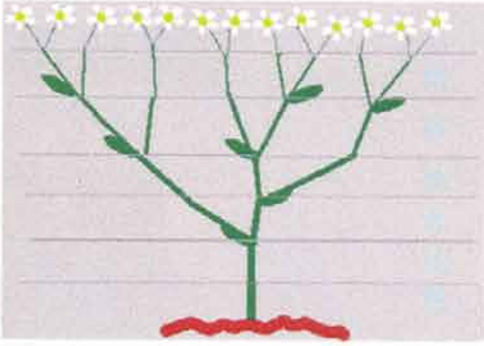
Semena so razvrščena v nasprotnih spiralah; vijejo se v dve smeri, v levo ali v desno. Če štejemo števila na zunanjem robu, ugotovimo, da njihovo število ni enako kot na notranjem, temveč imamo spet zaporedni števili Fibonaccijevega zaporedja. To vidimo pri sončnici in marjetici ter strukturi lupine ananasa.



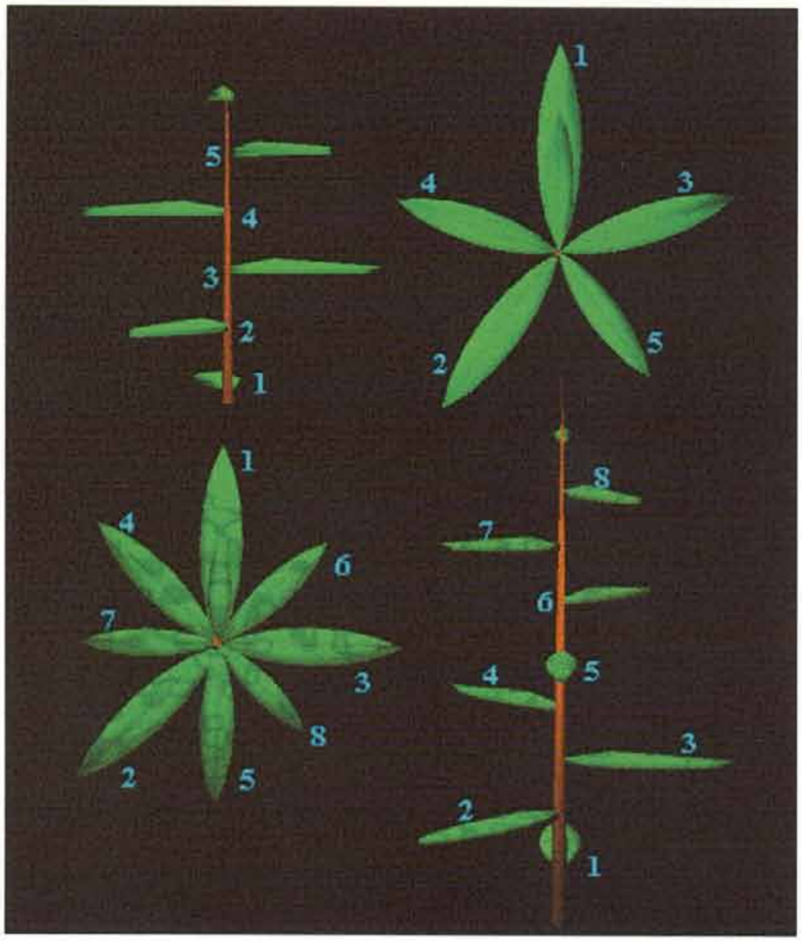


Največ primerov Fibonaccijevega zaporedja najdemo pri rastlinah (npr. veje dreves, stebla nekaterih rož…).

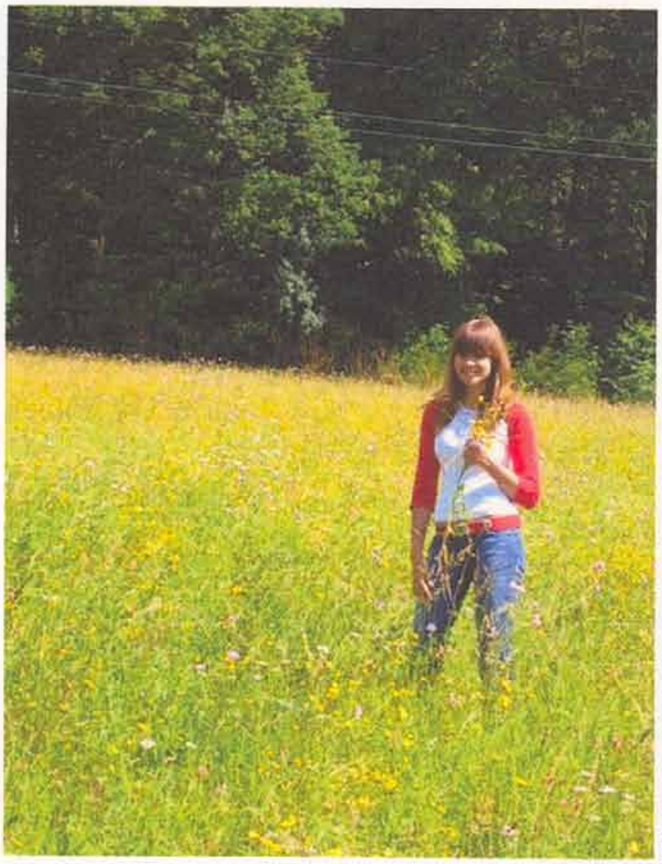





Štetje razporeditve listov na steblu rastline



Razporeditev listov na steblu rastline



Cvetovi različnih rož

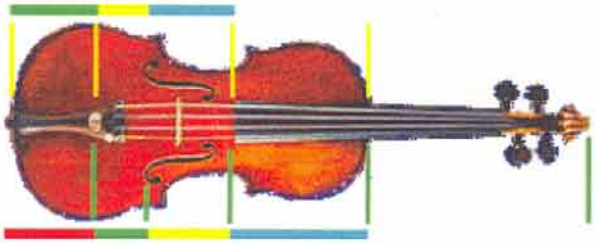
Semena storža sledijo v Fibonaccijevem zaporedju.

8. SKRIVNOSTNO UJEMANJE KULTURE IN NATURE V ZLATEM REZU

Vprašanje, ki se odpira ob tej nenavadni korespondenci lepote, narave in matematike, je dokaj nenavadno. Kako to, da razmerje, ki se tako pogosto pojavi v naravi in odraža njeno ekonomičnost in učinkovitost, vlada tudi svetu lepote in kulture, ki ga nekaj tisočletij gradimo vzporedno naravi? Je zlati rez res prijeten našim očem zgolj zato, ker smo nanj navajeni, ker ga opažamo v naravi?

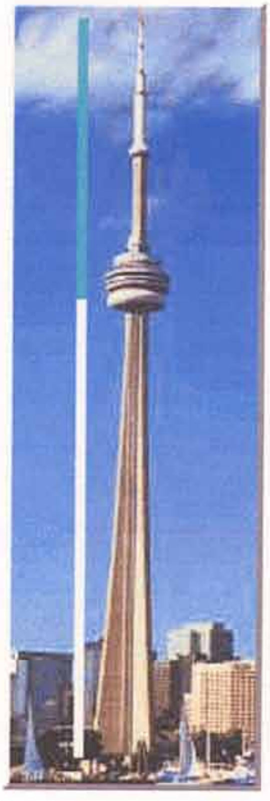
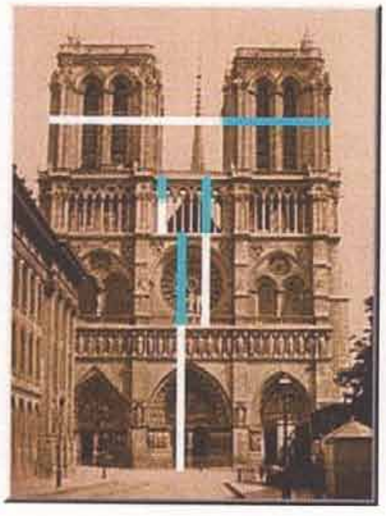
V romanu Da Vincijeva šifra je zapisano, da je št. Φ ustvaril Stvarnik.Glede na to, da imamo v naravi vse polno primerov, v katerih najdemo omenjeno število, lahko pomislimo, da je morda res.

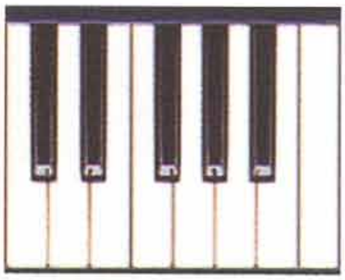
Fosili z lepo vidno spiralo, ki jo dobimo na osnovi zlatega reza.



Zlati rez v violini


FIRST USA
1991
03/02
VISA

Slike zlatega reza v umetnosti, kulturi, gradbeništvu ter vsakdanjih predmetih

9. FIBONACCIJEVO ZAPOREDJE IN ZLATI REZ V UMETNOSTI

Fibonaccijeva števila je uporabil Dan Brown v svojem delu Da Vincijeva šifra.
Da Vincijeva šifra (izvirno angleško The Da Vinci Code) je roman ameriškega pisatelja Dana Browna, ki je izšel leta 2003 in postal svetovna uspešnica z več kot 17 milijoni prodanih izvodov. Je nadaljevanje pisateljeve manj znane knjige Angeli in demoni (Angels and demons).

Leonardo da Vinci, italijanski renesančni arhitekt, izumitelj, inženir, kipar in slikar se je rodil 15. aprila 1452 v Toskani v Italiji, umarl pa 2.maja v Clouxu v Franciji.

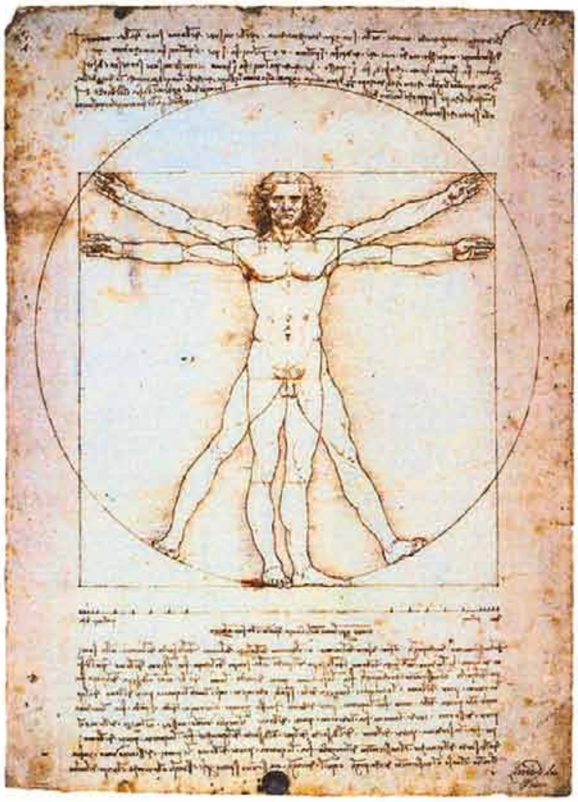
Zaradi vsestranske nadarjenosti ga opisujejo kot genija. Znan je po svojih slikarskih mojstrovinah, kot sta Zadnja večerja in Mona Lisa, obenem pa tudi po številnih izumih, ki so bili pred svojim časom, a jih za čas življenja ni objavil. Poleg tega je tvorno prispeval k raziskavam na področjih anatomije, astronomije in gradbeništva.

Za izpopolnjevanje svoje tehnike se je obračal na znanost. Učenje naravne anatomije se je zelo poznalo na slikah, ki so bile zelo realistične, figure na njih pa zelo natančne. Bil je prvi umetnik, ki je študiral telesna razmerja moških, žensk in otrok in jih uporabil, da je lahko določil »idealno« človeško figuro.

Nasprotno s svojimi sodobniki (npr. Michelangelo) Leonardo ni pretiraval z mišičastimi telesi.

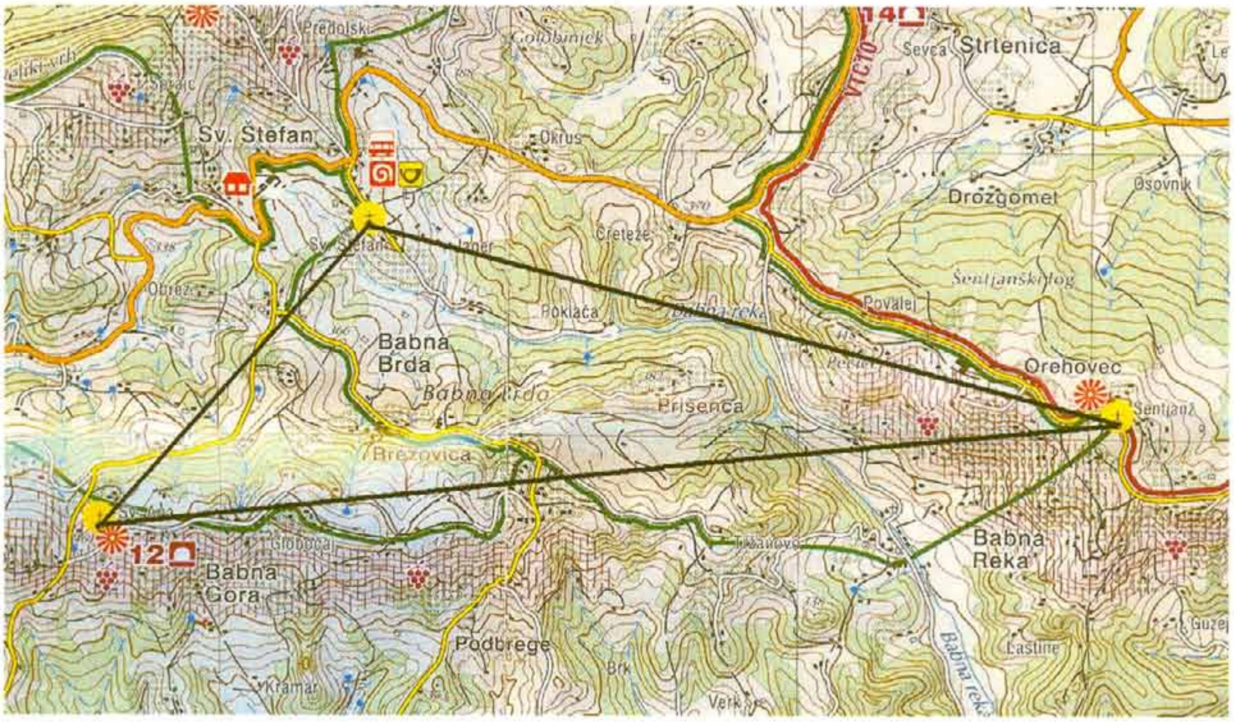
Navsezadnje je Leonardo verjel, da umetnik mora poznati ne le pravila perspektive, ampak vse zakone narave. Verjel je, da je oko popoln instrument za vse te zakone se naučiti, umetnik pa popoln človek za vse to naslikati.

Udeleževal se je avtopsij in izdelal številne izjemno podrobne anatomske risbe ter načrtoval obsežno delo o človeški in primerjalni anatomiji. Okoli leta 1490 je v svoji skicirki izdelal študijo o kanonu proporcev, kot jih opisujejo tedaj nedavno ponovno odkriti zapisi rimskega arhitekta Vitruvija. Študija, imenovana »Razmerja človeškega telesa po Vitruviju«, je eno njegovih najbolj znanih del.

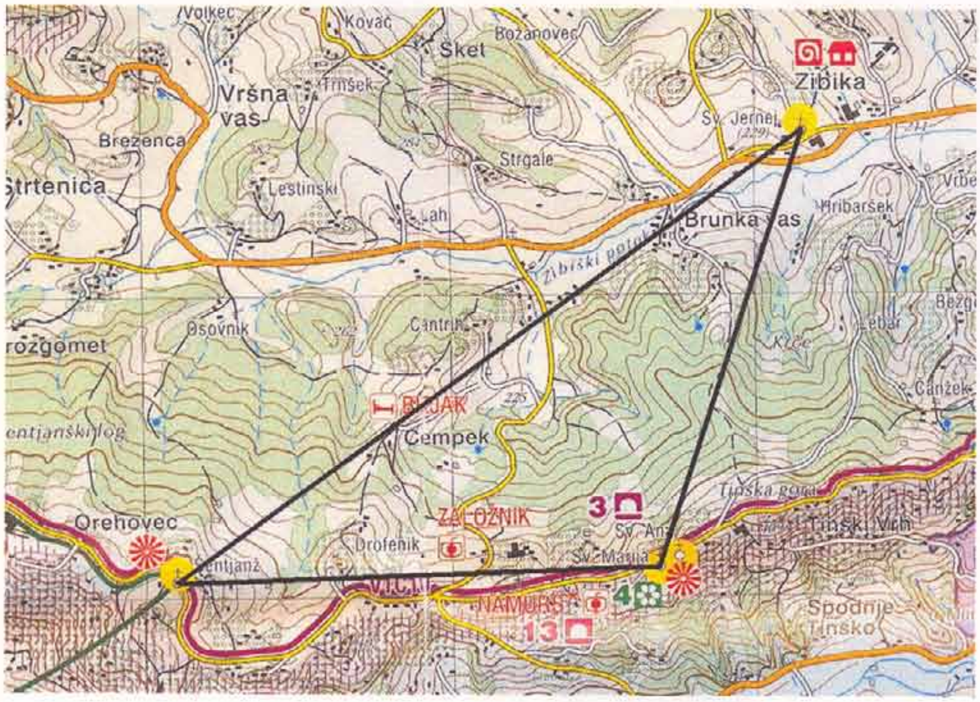


9.1. Zlati rez med razdaljami cerkev v naši okolici

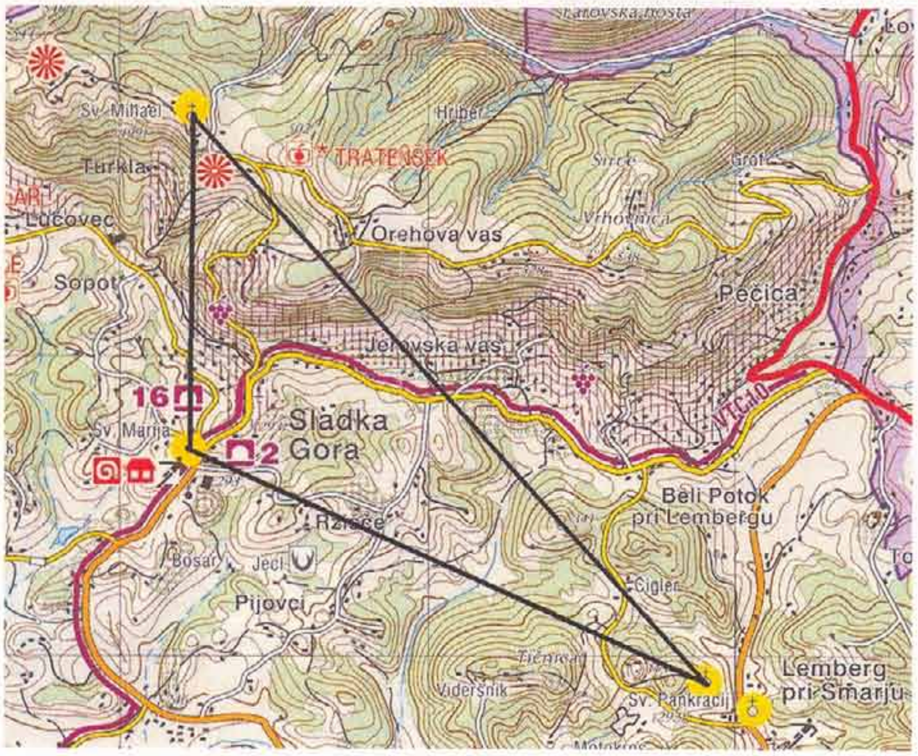
Zdi se neverjetno, toda tudi med razdaljami cerkev v naši bližnji okolici se pojavljajo razmerja zlatega reza. Tako se med cerkvami Šentjanž, Sv. Štefan in Sv. Ana pojavi zlati trikotnik.



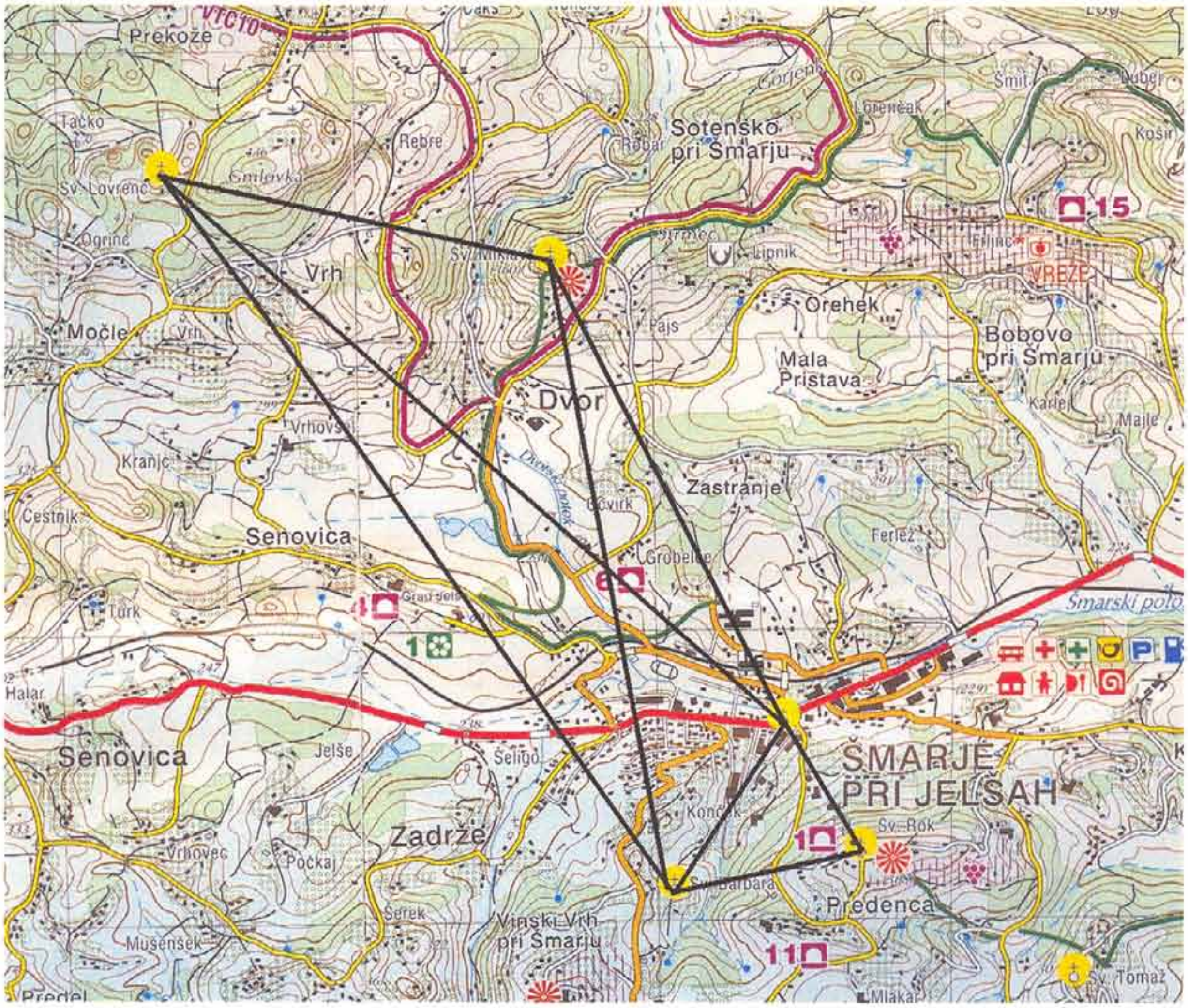
Med razdaljami cerkev Šentjanž, Sv.Marije na Tinskem in farne cerkve v Zibiki najdemo in izračunamo razmerja zlatega trikotnika.



Naše raziskovanje razmerij zlatega trikotnika in razdalj med cerkvami se potrdi tudi pri razdaljah med cerkvami Sv. Marije na Sladki Gori, Sv. Pankracija v Lembergu in Sv. Mihaela nad Sladko Goro.



Najbolj zanimiva pa se je pokazala povezava med cerkvami Sv. Miklavža, Sv. Lovrenca, farne cerkve Sv. Marije v Šmarju, Sv. Roka in Sv. Barbare, ki kaže na razmerje zlate spirale.



10. ZLATI REZ V ŠOLI

Učna tema: Razmerje in sorazmerje

Učna enota: Zlati rez

Učno-izobraževalni cilji: Učenci spoznajo zlati rez in njegovo vlogo na različnih področjih v znanosti, umetnosti in vsakdanjem življenju.

Učne metode: Razgovor, razlaga, eksperimentalni del

Učne oblike: Skupinska, individualna

Učna sredstva in pripomočki: Slike s primeri zlatega reza , metri, kalkulatorji

UVOD

Poglejmo nekaj primerov, v katerih se pojavi zlati rez.

VPELJAVA NOVE SNOVI

Število Φ smo prepoznali kot razmerje dveh števil. Pravimo da sta dve daljici AB in CD v razmerju zlatega reza ali zlatem razmerju, če je kvocient njunih dolžin enak številuΦ. Tvorimo lahko tudi zlate pravokotnike. To so pravokotniki, katerih stranici sta v razmerju zlatega reza.

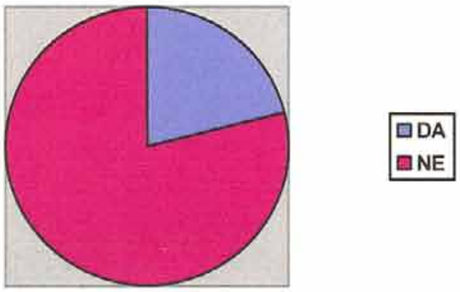
PREISKOVALNO DELO IN MERITVE

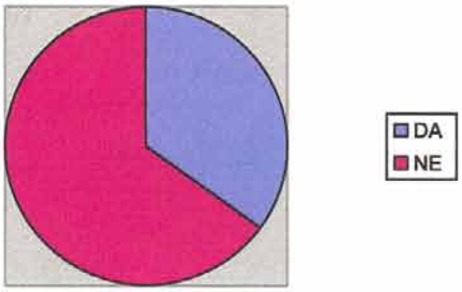
Učenci so delali v parih in drug drugemu merili dele telesa, ki so jih pozneje vpisovali v preglednice. Dolžina A predstavlja višino med popkom in čelom, dolžina B pa višino od popka do tal. Dolžina C je A+B oziroma višina celotnega telesa. Nato so dolžine med seboj delili ter dobili razmerja. Lahko bi delili tudi razmerji A:C ter A:B:C, vendar smo samo A:B in B:C. Merili tudi razmerja pri delih nog. Višina A predstavlja dolžino od kolena do bokov, višina B dolžino od kolena do tal in dolžina C, ki je A+B. Zlati rez najdemo tudi pri proporcih roke.

Skica razmerja človeškega telesa

Rezultati meritev razmerij celotnega telesa pri 76 učencih 9-razredov v natančnem obsegu števila Φ :

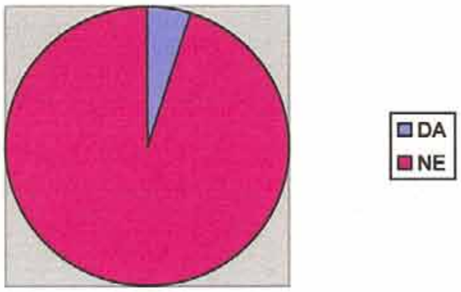
Razmerje A:B DA 21% NE 79%
Razmerje B:C DA 35% NE 65%

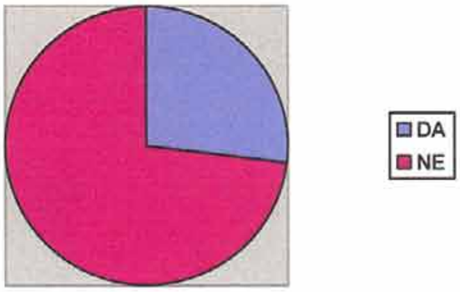




Rezultati meritev razmerij pri nogah pri 76 učencih 9-razredov v natančnem obsegu števila Φ :

Razmerje A:B DA 5% NE 95%
Razmerje B:C DA 27% NE 73%





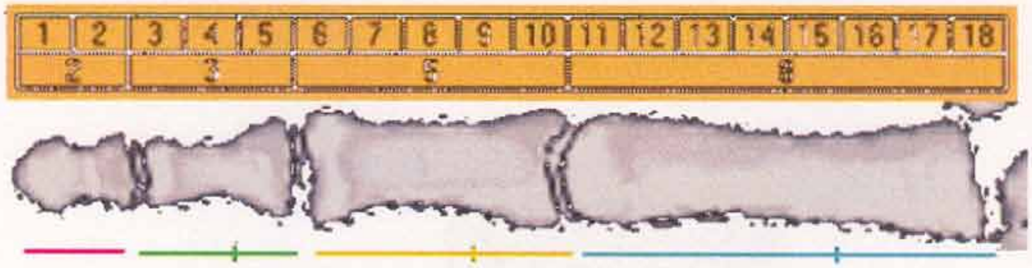
UGOTOVITVE

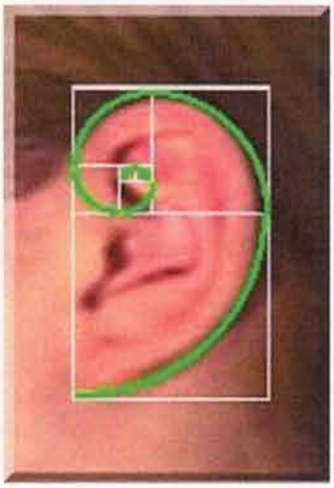
Predvidevanja kažejo, da je malo učencev, ki imajo dele telesa v idealnem razmerju zlatega reza. Z natančnimi merjenji posameznih delov telesa pri učencih pa ugotovimo, da se devetošolci zelo približujejo razmerjem zlatega reza. Število Φ namreč pri učencih variira med 0,5 in idealnim številom 0,618.

Zlati rez najdemo tudi na delih telesa, npr. na roki, in sicer prstnih kosteh, kjer je lep primer Fibonaccijevih števil. Primer spiralastega zlatega reza je najden tudi na človeškem uhlju in na obrazih. Znani Hollywoodski zvezdnik George Clonney ima razmerja svojega obraza v zlatem rezu.

Razmerje obraza v zlatem rezu

Razmerje roke v zlatem rezu





Zlata spirala v človeškem uhlju

Delo v razredu

Merjenje delov telesa

Vse to pa je bilo tudi naše osrednje vodilo pri raziskovalni nalogi: »LEPOTA IN MOČ ZLATEGA REZA«, saj so razmerja zlatega reza in razsežnosti le-tega neizmerna tako v matematiki, arhitekturi, likovni umetnosti kot tudi v naravi.

11. ZAKLJUČEK

S svojim delom smo zadovoljni, saj smo prišli do zastavljenih ciljev. Poiskali in preučili smo literaturo o zlatem rezu in Fibonaccijevem zaporedju kot osnovi za razumevanje nekaterih matematičnih zakonitosti narave. Kljub skrivnostnemu matematičnemu izvoru so plat števila Φ, njegova vloga in povezanost z naravo osupljive.

Ugotovili smo, da število Φ izhaja iz Fibonaccijevega zaporedja, kjer je vsota dveh zaporednih števil enaka naslednjemu številu, tudi količniki sosednjih števil znašajo približno 1,618, kar je ravno število Φ.

Število Φ, ki so ga znanstveniki sprva poimenovali božanski proporc, je danes znano kot zlati rez, ki je v naši raziskovalni nalogi natančno opredeljen.

Razmerja zlatega reza oz. števila Φ smo preučevali pri rastlinah, živalih in delih človeškega telesa tu ugotovili, da je navzočnost števila Φ tolikšna, da zagotovo ni naključna, saj se pojavlja pri steblih rastlin, razporeditvi cvetnih listov pri cvetu, storžu smreke, ananasu ... umetnosti, arhitekturi in delih človeškega telesa ...

Zanimivi so naši rezultati merjenja razmerij med deli telesa 76 devetošolcev, kar potrjuje našo hipotezo, da se le-ta približujejo številu Φ. Pri 21% učencev so ta razmeja idealna, pri ostalih 79% pa se idealnim razmerjem približujejo.

Pri ugotavljanju prisotnosti zlatega reza oz. števila Φ na nogah ugotovimo, da ima le 5% učencev idealno razmerje zlatega reza, ostali se temu razmerju le približujejo.

Zelo pa nas je prevzela prisotnost zlatega reza razdalj med cerkvami v naši okolici. Tako smo z merjenji na zemljevidu Geodetske uprave RS za Upravno enoto Šmarje pri Jelšah ugotovili nenavadno prisotnost magičnega števila Φ med naslednjimi cerkvami:

a) Sveti Štefan – Šentjanž – Sveta Ana, zlati trikotnik;
b) Šentjanž – Sveta Marija na Tinskem – farna cerkev v Zibiki, zlati trikotnik;
c) Sladka Gora – Lemberg – Sveti Mihael nad Sladko Goro, zlati trikotnik;
d) Sveti Lovrenc - Sveti Miklavž – Sveta Marija v Šmarju – Sveti Rok – Sveti Tomaž, zlata spirala.

S temi meritvami je bila potrjena še ena izmed hipotez, da so razdalje med posameznimi cerkvami v naši bližnji okolici v obsegu števila Φ.

Našo hipotezo, da je poznavanje in razumevanje zlatega reza in Fibonaccijevega zaporedja nasplošno manj znano, so pokazali tudi rezultati anketnega vprašalnika med učenci 9 razredov, kjer v populaciji 110 oseb le 3 poznajo zlati rez.
Menimo, da smo s to raziskovalno nalogo opravili svoj osrednji namen, to pa je, razširiti poznavanje in razumevanje zlatega reza in Fibonaccijevega zaporedja med učenci in tudi odraslimi.

Hvala mentorici Bojani Pevec, ki nam je pri najinem delu svetovala in naju spodbujala, mag. Karlu Šmigocu za opravljeno recenzijo naloge, gospe Darinki Seničar za lektoriranje in gospodu Mitju Šketu za računalniške nasvete.

12. LITERATURA

1. D. Brown: Da Vincijeva šifra, Mladinska knjiga (2004).
2. J. G. Rosenstein , D. Franzblau, F.S Roberts: Discrete Mathematic in the Schools, DIMACS (1992), 25-34.
3. http://wikipedia.org.
4. http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R. Knott/Fibonacci.

IZJAVA

Pri raziskovalni nalogi so uporabljeni viri in literatura z navedbo avtorja.

Recenzija raziskovalne naloge

LEPOTA IN MOČ ZLATEGA REZA

Avtorja: Maruša Habot in Martin Čakš

Mentorica: Bojana Pevec

Osnovna šola Šmarje pri Jelšah, šolsko leto 2005/06

V raziskovalni nalogi "Lepota in moč zlatega reza" sta si učenka Maruša Habot in učenec Martin Čakš pod mentorstvom gospe Bojane Pevec izbrala zanimivo in hkrati aktualno področje, ki se navezuje na delo Leonarda da Vincija in na roman Da Vincijeva šifra, ki je trenutno eden največjih svetovnih uspešnic. V nalogi sta avtorja zanimivo in pregledno obravnavala povezavo umetniških del velikega znanstvenika z zlatim rezom in Fibonaccijevim zaporedjem.

Raziskovalna naloga je zasnovana večplastno. V teoretičnem delu sta avtorja predstavila osnove zlatega reza, kjer sta nazorno s slikami pojasnila Evklidovo definicijo zlatega reza in nadaljevala preko konkretnih primerov do definicije števila zlatega reza (zlato število), ki velja za eno najlepših in najzanimivejših števil na svetu.

Osrednji del naloge je matematična uporaba zlatega reza. Le ta se končuje s konstrukcijo zlate spirale, ki jo izvedeta s konstrukcijo v zlatem pravokotniku. Poleg omenjene konstrukcije zlate spirale znotraj zlatega pravokotnika pokažeta še konstrukcijo velike zlate spirale s pomočjo tričetrtinskih krožnih lokov. Ta konstrukcija je iz matematičnega vidika zelo zanimiva, vendar že presega nivo osnovnošolskega znanja.

S prikazom Fibonaccijevih števil na primerih v naravi se začenja praktični del naloge. Fibonaccijevo zaporedje števil prikažeta avtorja pri sončnici, marjetici in pri strukturi lupine ananasa. Iskanje primerov Fibonaccijevega zaporedja na vejah dreves in na steblih nekaterih rastlin dokazuje, da je bilo potrebno del naloge napraviti konkretno v naravi, kar je še posebej pohvalno. S praktičnim delom sta avtorja napravila matematiko živo, saj sta jo povezala z naravo.

Primeri zlatega reza in Fibonaccijevega zaporedja v arhitekturi, umetnosti in anatomiji, ki sta jih avtorja predstavila s skrbno izbranimi slikami, dokazujejo, da sta se morala tudi dobro seznaniti s strokovno literaturo. Originalen je pristop k iskanju zlatega reza v vsakdanjem življenju pri razdaljah med znanimi cerkvami. Z nalogo sta avtorja prispevala k popestritvi pouka matematike pri šolski uri. Posebej se mi zdi vredno pohvaliti, da so pri praktičnem delu sodelovali vsi učenci v razredu. Zato je naloga vredna pohvale tudi z didaktičnega vidika.

Raziskovanje zlatega reza na osnovnošolskem nivoju je zahtevna naloga, ki zahteva obsežno in pregledno znanje mentorja. Mentorici gospe Bojani Pevec je to izredno dobro uspelo. Zato sodi naloga v dobro strokovno literaturo o zanimivem področju matematike, ki bo lahko v pomoč učencem in učiteljem v osnovni in srednji šoli.

Čestitam avtorjema in mentorici!

Šmarje pri Jelšah, 10. rožnik 2006

mag. K. Šmigoc

K. Šmigoc